

5. Minimalizace

Formální jazyky a automaty

Jiří Balun

Obsah

1 Redukce DFA

- Faktorizace DFA
- Nerozlišitelnost stavů
- Ekivalence A a $A/\simeq$
- Isomorfismus DFA
- Minimalita $A/\simeq$

2 Minimalizace DFA

- Algoritmus pro minimalizaci DFA
- Příklad: minimalizace DFA

Redukce DFA

Opakování

- Rozklad množiny X je množina $\Pi \subseteq 2^X$, kde:
 - 1 každá $A \in \Pi$ je neprázdná,
 - 2 pro každé dvě $A, B \in \Pi$: pokud $A \neq B$, pak $A \cap B = \emptyset$,
 - 3 $\bigcup_{A \in \Pi} A = X$.
- Relace $\sim \subseteq X \times X$ je ekvivalence, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
- Pro ekvivalenci $\sim$ na X definujeme:
 - pro každé $x \in X$ třídu rozkladu $[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$, která obsahuje x ,
 - rozklad X indukovaný $\sim$ jako systém $\Pi_{\sim} = \{[x] \mid x \in X\}$,
 - $\Pi_{\sim}$ se obvykle označuje $X/\sim$ a nazývá se faktorová množina množiny X podle $\sim$.

Zprava invariantní ekvivalence

Intuice: pomocí relace ekvivalence chceme charakterizovat stavy DFA, které se chovají podobně a jsou tedy kandidáti na zredukování.

Definice

Mějme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, pak relace ekvivalence $\Theta \subseteq Q \times Q$ je **zprava invariantní** vzhledem k δ , pokud platí, že $\langle p, q \rangle \in \Theta$, pak $\langle \delta(p, a), \delta(q, a) \rangle \in \Theta$ pro všechny $a \in \Sigma$.

- dvojice stavů z $\langle p, q \rangle \in \Theta$ se chovají podobně vzhledem k δ :
 - stavy p a q patří do stejné třídy rozkladu, tj. $[p] = [q]$
 - pro každý symbol $a \in \Sigma$ máme $\delta(p, a) = r$ a $\delta(q, a) = s$, kde $\langle r, s \rangle \in \Theta$
 - proto stavy r a s jsou ve stejné třídě, tj. $[r] = [s]$

Příklad

Dva mezní případy zprava invariantní ekvivalence (pro libovolný DFA A):

- 1 relace identity $\Theta = \{\langle q, q \rangle \mid q \in Q\}$,
- 2 úplná relace $\Theta = Q \times Q$.

Faktorizace DFA

Intuice: vytvoříme automat podle zadané ekvivalence Θ , tak že sloučíme ekvivalentní stavy do jednoho (stav, který vznikne tímto sloučením, odpovídá třídě rozkladu Θ).

Definice

Mějme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a Θ je zprava invariantní ekvivalence na Q vzhledem k δ . Definujeme **faktorový automat** jako DFA $A/\Theta = (Q/\Theta, \Sigma, \delta', [q_0], F')$, kde:

- Q/Θ je faktorová množina množiny Q podle Θ (stavy jsou třídy rozkladu),
 - abeceda Σ zůstává stejná,
 - $\delta': Q/\Theta \times \Sigma \rightarrow Q/\Theta$ je přechodová funkce dána jako $\delta'([q], a) = [\delta(q, a)]$,
 - počáteční stav $[q_0]$ odpovídá třídě rozkladu obsahující stav q_0 ,
 - $F' = \{[q_f] \mid q_f \in F\}$ je množina tříd rozkladu, které obsahují koncové stavy.
-
- obecně neplatí rovnost $L(A) = L(A/\Theta)$
 - při redukci/minimalizaci se snažíme najít co největší Θ , tak aby tato rovnost platila
 - pravá invariance Θ je příliš obecná, musíme vyžadovat silnější vlastnost, aby rovnost platila

Korektnost A/Θ

Věta

Mějme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a jeho faktorový DFA $A/\Theta = (Q/\Theta, \Sigma, \delta', [q_0], F')$ podle Θ , pak přechodová funkce $\delta'([q], a) = [\delta(q, a)]$ je korektně definovaná:

- 1 pokud $[p] = [q]$, pak platí $[\delta(p, a)] = [\delta(q, a)]$ pro všechna $a \in \Sigma$,
- 2 pro všechny $w \in \Sigma^*$ platí $\hat{\delta}'([q], w) = [\hat{\delta}(q, w)]$.

Důkaz

V bodu 1 musíme ukázat, že nezáleží na výběru prvku z rozkladu dle Θ :

- mějme $[p] = [q]$ (a tedy platí $\langle p, q \rangle \in \Theta$) a libovolné $a \in \Sigma$,
- potom $\langle \delta(p, a), \delta(q, a) \rangle \in \Theta$ (dle definice), a tedy platí $[\delta(p, a)] = [\delta(q, a)]$.

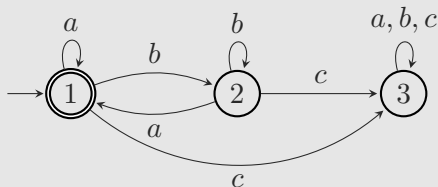
Bod 2 dokážeme indukcí přes délku slova $w \in \Sigma^*$:

- pokud $w = \varepsilon$ pak: $\hat{\delta}'([q], \varepsilon) = [q] = [\hat{\delta}(q, \varepsilon)]$,
- předpokládejme, že tvrzení platí pro $x \in \Sigma^*$, tj. $\hat{\delta}'([q], x) = [\hat{\delta}(q, x)]$, a dokážeme jej pro $w = xa$, kde $a \in \Sigma$: $\hat{\delta}'([q], xa) = \delta'([\hat{\delta}(q, x)], a) = [\delta(\hat{\delta}(q, x), a)] = [\hat{\delta}(q, xa)]$. □

Příklad: faktorizace DFA

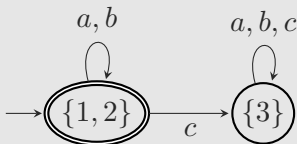
Příklad

DFA $A = (\{1, 2, 3\}, \{a, b\}, \delta, 1, 1)$ s jazykem $L(A) = L((a + b)^*a + \epsilon)$:



Mějme relaci $\Theta = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ s rozkladem $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, pak:

- $A/\Theta = (\{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{a, b\}, \delta', \{1, 2\}, \{\{1, 2\}\})$ je faktorový automat podle Θ ,
- platí $L(A) \subset L(A/\Theta)$, protože $L(A/\Theta) = \{a, b\}^*$ (evidentně $L(A) \neq L(A/\Theta)$).



Nerozlišitelnost stavů

Intuice: dva stavy DFA jsou nerozlišitelné, pokud se chovají stejně pro všechny řetězce, tj. jsou nerozlišitelné vzhledem k dosažitelnosti koncových stavů pod libovolným řetězcem.

Definice

Mějme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, pak jeho stavy $p, q \in Q$ jsou **nerozlišitelné** v A (značíme $p \simeq_A q$), pokud pro všechny řetězce $w \in \Sigma^*$ platí:

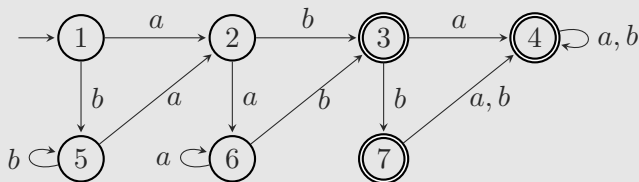
$$\delta(p, w) \in F \iff \delta(q, w) \in F.$$

- pokud bude A jasné z kontextu, budeme psát jen $\simeq$ namísto $\simeq_A$
- pro jednoduchost předpokládáme, že A nemá nedosažitelné stavy
- DFA A je **redukovaný**, pokud $\simeq_A$ je relace identity
- DFA A s jazykem $L(A) = L$ je **minimální DFA** pro jazyk L , pokud má nejmenší možný počet stavů ze všech DFA, které rozpoznávají jazyk L

Příklad: nerozlišitelnost stavů

Příklad

Mějme DFA $A = (\{1, \dots, 7\}, \{a, b\}, \delta, 1, \{3, 4, 7\})$.



Na první pohled nerozlišitelné stavy:

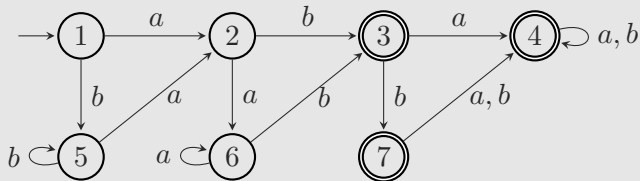
- $4 \simeq_A 7$, protože pro libovolné $w \in \Sigma^*$ platí, že $\delta(4, w) \in F$ a zároveň $\delta(7, w) \in F$,
- $3 \simeq_A 4$ analogicky jako v předchozím případě,
- $3 \simeq_A 7$ plyne z tranzitivity relace $\simeq_A$.

U dalších dvojic už to nemusí být tak jednoduché vidět (například $1 \simeq_A 5$ a $2 \simeq_A 6$), proto potřebujeme nějaký algoritmus, který umí vypočítat relaci $\simeq_A$.

Příklad: faktorový automat $A/\simeq$

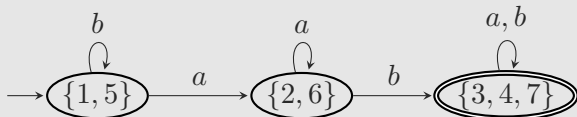
Příklad

Mějme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, 1, \{3, 4, 7\})$, kde $Q = \{1, \dots, 7\}$ a $\Sigma = \{a, b\}$.



Relace $\simeq_A$ má rozklad $\{\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4, 7\}\}$:

- tento rozklad je faktorizace Q podle $\simeq_A$, tj. $Q/\simeq = \{\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4, 7\}\}$,
- nyní můžeme zkonstruovat $A/\simeq = (Q/\simeq, \Sigma, \delta', \{1, 5\}, \{\{3, 4, 7\}\})$,
- kde δ' vypočítáme následovně: $\delta'(\{1, 5\}, a) = \delta'([1], a) = [\delta(1, a)] = [2] = \{2, 6\}$.



Korektnost $\simeq_A$

Věta

Pro libovolné DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je relace $\simeq_A$ je zprava invariantní ekvivalence.

Důkaz

Reflexivita, symetrie a tranzitivita $\simeq_A$ je evidentní.

Musíme ukázat pravou invarianci. Mějme $p \simeq q$ pro nějaké $p, q \in Q$ a musíme ukázat, že $\delta(p, a) \simeq \delta(q, a)$ pro všechna $a \in \Sigma$:

- Z definice $\simeq$ platí $\delta(p, w) \in F \iff \delta(q, w) \in F$ pro všechny řetězce $w = ax \in \Sigma^*$,

$$\hat{\delta}(\delta(p, a), x) \in F \iff \hat{\delta}(\delta(q, a), x) \in F$$

- nechť $p' = \delta(p, a)$ a $q' = \delta(q, a)$, pak platí $p' \simeq q'$, protože dle přechozího:

$$\hat{\delta}(p', x) \in F \iff \hat{\delta}(q', x) \in F$$

pro všechna $x \in \Sigma^*$, a tedy $p' = \delta(p, a) \simeq \delta(q, a) = q'$.



Základní vlastnosti $\simeq_A$

Motivace: charakterizujeme vztah koncových stavů A a $A/\simeq = (Q/\simeq, \Sigma, \delta', [q_0], F')$.

Lemma 1

Pokud $p \simeq q$, pak p je koncový stav právě tehdy, když q je koncový stav.

Důkaz

Nechť $p \in F$ a $p \simeq q$, pak $\delta(p, \varepsilon) \in F$ a tedy i $\delta(q, \varepsilon) \in F$. Z toho dostaneme $q \in F$. $\square$

Lemma 2

Pro stav $[p]$ z $A/\simeq$ platí, že $[p]$ je koncový stav právě tehdy, když p je koncový stav v A .

Důkaz

Implikace („ $\Leftarrow$ “) platí přímo z definice koncových stavů $A/\simeq$.

Implikace („ $\Rightarrow$ “): pokud je $[p]$ je koncový stav $A/\simeq$, pak existuje $q \in [p]$ takový, že $q \in F$ je koncový v A . Díky Lemma 1 a $p \simeq_A q$ dostaneme, že $p \in F$ je koncový v A . $\square$

Ekivalence A a $A/\simeq$

Věta

Mějme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a jeho faktorizaci $A/\simeq = (Q/\simeq, \Sigma, \delta', [q_0], F')$, pak platí:

- 1 $A/\simeq$ je redukovaný,
- 2 $L(A) = L(A/\simeq)$,
- 3 pokud A nemá nedosažitelné stavy, pak je nemá ani $A/\simeq$.

Důkaz (část 1/2)

V bodu 1 musíme ukázat, že $A/\simeq$ neobsahuje dva různé nerozlišitelné stavy:

- mějme libovolné dva stavy $[p]$ a $[q]$, které jsou nerozlišitelné v $A/\simeq$,
- z definice nerozlišitelnosti $\delta'([p], w) \in F' \iff \delta'([q], w) \in F'$ pro všechny $w \in \Sigma^*$,
- proto $[\delta(p, w)] \in F'$ právě tehdy, když $[\delta(q, w)] \in F'$ pro všechny $w \in \Sigma^*$,
- díky Lemma 2 je libovolný $[r]$ koncový v $A/\simeq$ právě tehdy, když r je koncový v A ,
- z toho plyne $\delta(p, w) \in F \iff \delta(q, w) \in F$, a tedy p a q jsou nerozlišitelné i v A ,
- z konstrukce $A/\simeq$ dostáváme, že $[p] = [q]$ je jeden stav, a proto je $A/\simeq$ redukovaný.

Důkaz (část 2/2)

Bod 2 z definice, $w \in L(A/\simeq)$ právě tehdy, když $\delta'([q_0], w) \in F'$, což je ekvivalentní s tím, že $[\delta(q_0, w)] \in F'$ a díky Lemma 2 dostaneme $\delta(q_0, w) \in F$. Proto platí

$$w \in L(A) \iff w \in L(A/\simeq),$$

a tedy $L(A) = L(A/\simeq)$.

V bodu 3 A má jen dosažitelné stavy, proto pro libovolný stav $[q] \in Q/\simeq$ existuje takové $w \in \Sigma^*$, že $\delta(q_0, w) = q$. Proto $[q] = [\delta(q_0, w)] = \delta'([q_0], w)$, a tedy $[q]$ je dosažitelný. $\square$

- zbývá vyřešit tyto otázky:
 - je redukovaný $A/\simeq$ zároveň minimální?
 - jak pro daný DFA vypočítat relaci $\simeq$ a $A/\simeq$?

Isomorfismus DFA

Intuice: dva automaty jsou isomorfní, pokud jsou totožné, až na pojmenování stavů.

Definice

Mějme dva DFA $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{0,1}, F_1)$ a $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{0,2}, F_2)$, pak zobrazení $h : Q_1 \rightarrow Q_2$ je isomorfismus z A_1 do A_2 pokud platí:

- 1 h je bijektivní zobrazení,
- 2 $h(q_{0,1}) = q_{0,2}$ (počáteční stav A_1 se zobrazí počáteční stav A_2),
- 3 $q \in F_1$ právě když $h(q) \in F_2$,
- 4 $h(\delta_1(q, a)) = \delta_2(h(q), a)$ platí pro všechny $q \in Q_1$ a $a \in \Sigma$.

- pokud existuje isomorfismus mezi A_1 a A_2 , pak $L(A_1) = L(A_2)$
- implikaci na předchozím řádku lze obrátit za předpokladu minimality A_1 a A_2 :
 - pokud jsou A_1 a A_2 minimální (a tedy nemají nedosažitelné stavy) a rozponávají stejný jazyk, pak jsou isomorfní (existuje mezi nimi isomorfismus)
 - **důsledek:** ke každému DFA existuje pouze jeden minimální DFA (až na isomorfismus)

Minimalita $A/\simeq$

Intuice: redukovaný DFA je pro daný jazyk unikátní minimální DFA až na isomorfismus.

Věta

Nechť L je regulární, pak platí:

- 1 libovolné dva redukované DFA rozpoznávající jazyk L jsou isomorfní,
- 2 libovolný redukovaný DFA A s jazykem $L(A) = L$ je minimální DFA pro jazyk L ,
- 3 libovolné dva minimální DFA rozpoznávající jazyk L jsou isomorfní.

Důkaz

- 1 Stačí vzít předpis h jako $h(q) = \hat{\delta}_2(q_{0,2}, w)$, kde $q = \hat{\delta}_1(q_{0,1}, w)$ pro libovolné $w \in \Sigma^*$. Správně bychom měli ukázat, že h splňuje všechny podmínky kladené na isomorfismy.
- 2 Nechť A je redukovaný DFA pro jazyk L a B je minimální DFA pro jazyk L (a je tedy i redukovaný). Z 1 ale dostáváme, že oba automaty jsou isomorfní a tedy A má stejný počet stavů jako B .
- 3 Důsledek 1 a 2 a faktu, že redukovaný automat nemá nedosažitelné stavy. □

Minimalizace DFA

Algoritmus pro minimalizaci DFA

Vstup: DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Výstup: minimální DFA $A/\simeq = (Q/\simeq, \Sigma, \delta', [q_0], F')$

- 1 Inicializace: vytvoř tabulku pro relaci $\simeq \subseteq Q \times Q$ na množině stavů A
 - označ dvojice na diagonále pomocí $\checkmark$ (z reflexivity plyne, že dvojice $\langle q, q \rangle \in \simeq$)
 - označ dvojice pod diagonálou pomocí $\star$ (díky symetrii $\simeq$ stačí vypočítat jen dvojice nad diagonálou)
 - označ dvojici $\langle p, q \rangle$ pomocí $\mathbf{X}$, pokud jen jeden stav z této dvojice je koncový
- 2 Průběžný krok: proved' následující pro každou neoznačenou dvojici $\langle p, q \rangle$ v tabulce $\simeq$
 - pokud dvojice $\langle \delta(p, a), \delta(q, a) \rangle$ nebo $\langle \delta(q, a), \delta(p, a) \rangle$ je pro nějaké $a \in \Sigma$ označená $\mathbf{X}$, pak označ $\mathbf{X}$ i dvojici $\langle p, q \rangle$
- 3 Opakuj krok 2 tak dlouho, dokud jsme schopni označit nějakou další dvojici.
- 4 Všechny neoznačené dvojice označ $\checkmark$, přičemž výsledná tabulka odpovídá $\simeq$.
- 5 Jako výsledek vrátíme $A/\simeq$.

Korektnost algoritmu

Věta

Algoritmus pro minimalizaci DFA je korektní.

Důkaz

Důkaz vedeme sporem. Předpokládejme, že existuje dvojice stavů p a q , takových že:

- p a q jsou rozlišitelné, tedy právě jeden stav z $\delta(p, w)$ a $\delta(q, w)$ je koncový pro nějaký řetězec $w \in \Sigma^*$, a algoritmus tuto dvojici neoznačí pomocí **X**.

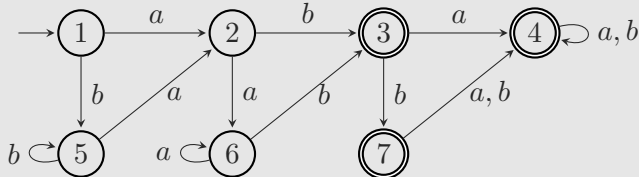
Každý takový pár $\langle p, q \rangle$ nazveme *špatný pár* a uvažujme, že vybereme ten pár s **nejkratším rozlišujícím řetězcem** $w = w_1 \dots, w_n$. Pro něj platí:

- w nemůže být ε , protože by dvojice byla rozlišena už při inicializaci (případ kdy právě jeden z p a q je koncový),
- uvažujme stavy $r = \delta(p, w_1)$ a $s = \delta(q, w_1)$, které musí být rozlišitelné řetězcem $w_2 \dots w_n$ (jinak bychom dostali spor s tím, že $\langle p, q \rangle$ je pár s nejkratším rozlišujícím řetězcem), a proto $\langle r, s \rangle$ nemůže být špatný pár a musel být označen **X**.
- dostáváme spor, protože algoritmus musel objevit i pár $\langle p, q \rangle$ hned v další iteraci. □

Příklad: minimalizace DFA

Příklad (část 1/5)

Zredukujeme automat $A = (\{1, \dots, 7\}, \{a, b\}, \delta, 1, \{3, 4, 7\})$.

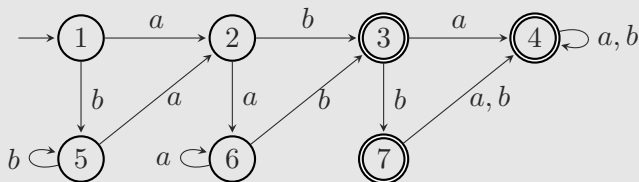


Inicializace:

- vytvoříme tabulku pro relaci $\simeq$,
- označíme dvojice na diagonále pomocí $\checkmark$,
- označíme dvojice pod diagonálou pomocí $\star$.

$\simeq$	1	2	3	4	5	6	7
$\rightarrow 1$	$\checkmark$						
2	$\star$	$\checkmark$					
3 $\star$	$\star$	$\star$	$\checkmark$				
4 $\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\checkmark$			
5	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\checkmark$		
6	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\checkmark$	
7 $\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\checkmark$

Příklad (část 2/5)

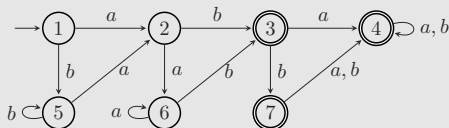


Inicializace:

- označ každou dvojici $\langle p, q \rangle$ pomocí $\times$, pokud jen jeden stav z této dvojice je koncový,
- například $\langle 1, 4 \rangle$, protože platí $1 \in Q \setminus F$ a zároveň $4 \in F$.

$\simeq$	1	2	3	4	5	6	7
$\rightarrow 1$	✓		$\times$	$\times$			$\times$
2	*	✓	$\times$	$\times$			$\times$
3*	*	*	✓		$\times$	$\times$	
4*	*	*	*	✓	$\times$	$\times$	
5	*	*	*	*	✓		$\times$
6	*	*	*	*	*	✓	$\times$
7*	*	*	*	*	*	*	✓

Příklad (část 3/5)

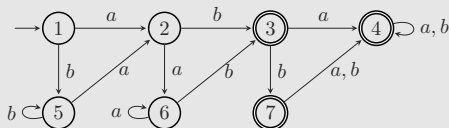


Průběžný krok: pro každou neoznačenou dvojici $\langle p, q \rangle$ vypočítáme $\langle \delta(p, a), \delta(q, a) \rangle$ pro všechny $a \in \Sigma$ a snažíme se označit nové dvojice.

$\simeq$	1	2	3	4	5	6	7
$\rightarrow 1$	✓	✗	✗	✗		✗	✗
2	★	✓	✗	✗	✗		✗
3★	★	★	✓		✗	✗	
4★	★	★	★	✓	✗	✗	
5	★	★	★	★	✓	✗	✗
6	★	★	★	★	★	✓	✗
7★	★	★	★	★	★	★	✓

	a	b
$\langle 1, 2 \rangle = \text{✗}$	$\langle 2, 6 \rangle ?$	$\langle 5, 3 \rangle \times$
$\langle 1, 5 \rangle = ?$	$\langle 2, 2 \rangle \checkmark$	$\langle 5, 5 \rangle \checkmark$
$\langle 1, 6 \rangle = \text{✗}$	$\langle 2, 6 \rangle ?$	$\langle 5, 3 \rangle \times$
$\langle 2, 5 \rangle = \text{✗}$	$\langle 6, 2 \rangle ?$	$\langle 3, 5 \rangle \times$
$\langle 2, 6 \rangle = ?$	$\langle 6, 6 \rangle \checkmark$	$\langle 3, 3 \rangle \checkmark$
$\langle 3, 4 \rangle = ?$	$\langle 4, 4 \rangle \checkmark$	$\langle 7, 4 \rangle ?$
$\langle 3, 7 \rangle = ?$	$\langle 4, 4 \rangle \checkmark$	$\langle 7, 4 \rangle ?$
$\langle 4, 7 \rangle = ?$	$\langle 4, 4 \rangle \checkmark$	$\langle 4, 4 \rangle \checkmark$
$\langle 5, 6 \rangle = \text{✗}$	$\langle 2, 6 \rangle \checkmark$	$\langle 5, 3 \rangle \times$

Příklad (část 4/5)



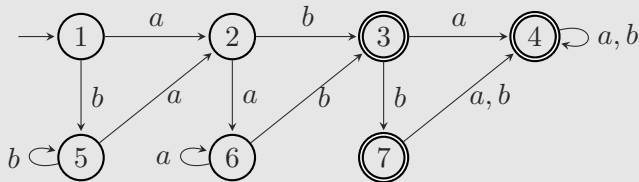
Opakujeme průběžný krok: už se nám nepodaří rozlišit další dvojici, proto všechny dosud neoznačené dvojice označíme ✓ (jsou nerozlišitelné).

Poznámka: dvojice $\langle 1, 5 \rangle$, $\langle 2, 6 \rangle$ a $\langle 4, 7 \rangle$ nemusíme počítat znovu, protože pro všechny znaky ze Σ jsou výsledné dvojice už v předchozím kroku označené ✓ (a nezmění se).

$\simeq$	1	2	3	4	5	6	7
$\rightarrow 1$	✓	✗	✗	✗	✓	✗	✗
2	*	✓	✗	✗	✗	✓	✗
3*	*	*	✓	✓	✗	✗	✓
4*	*	*	*	✓	✗	✗	✓
5	*	*	*	*	✓	✗	✗
6	*	*	*	*	*	✓	✗
7*	*	*	*	*	*	*	✓

	a	b
$\langle 1, 5 \rangle = ?$	$\langle 2, 2 \rangle_{\checkmark}$	$\langle 5, 5 \rangle_{\checkmark}$
$\langle 2, 6 \rangle = ?$	$\langle 6, 6 \rangle_{\checkmark}$	$\langle 3, 3 \rangle_{\checkmark}$
$\langle 3, 4 \rangle = ?$	$\langle 4, 4 \rangle_{\checkmark}$	$\langle 7, 4 \rangle ?$
$\langle 3, 7 \rangle = ?$	$\langle 4, 4 \rangle_{\checkmark}$	$\langle 7, 4 \rangle ?$
$\langle 4, 7 \rangle = ?$	$\langle 4, 4 \rangle_{\checkmark}$	$\langle 4, 4 \rangle_{\checkmark}$

Příklad (část 5/5)



Vrátíme výsledek: z relace $\simeq$ dostáváme rozklad $Q/\simeq = \{\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4, 7\}\}$ množiny Q , ze kterého zkonstruujeme minimální automat $A/\simeq$:

