6. Gramatiky a Chomského hierarchie

Formální jazyky a automaty

Jiří Balun

Obsah

1 Gramatika
- Pojem gramatiky
- Derivace řetězce
- Jazyk generovaný gramatikou

2 Regulární gramatika (RG)
- Popis RG
- Ekvivalence RG a DFA

3 Bezkontextová gramatika (CFG)
- Popis CFG
- Derivační stromy
- Víceznačnost CFG a CFL

Motivace

Na minulé přednášce

- ukázali jsme jak minimalizovat konečný deterministický automat
- představili jsme si nějaké další modely vycházející z konečných automatů

Na této přednášce

- zavedeme si pojem formální gramatiky
- pomocí gramatik popíšeme regulární jazyky
- představíme si novou třídu jazyků, takzvané **bezkontextové jazyky**

Gramatika

Intuice: gramatika je struktura, která formálně popisuje jazyk pravidly, s jejichž pomocí lze generovat řetězce.

Definice

Gramatika je reprezentována uspořádanou čtveřicí $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$, kde:

1. N je množina neterminálů,
2. Σ je množina terminálů (abeceda), platí $\Sigma \cap N = \emptyset$,
3. P je množina pravidel ve tvaru $P \subseteq V^*NV^* \times V^*$, kde $V = N \cup \Sigma$,
4. S je počáteční neterminál.

- gramatiky jsou mnohem silnější nástroj než konečné automaty nebo regulární výrazy
- pravidla v P se místo uspořádaných dvojic většinou zapisují ve tvaru $\alpha \to \beta$
  - pravidlo $\alpha \to \beta$ chápeme tak, že při jeho aplikaci se α přepíše na β
  - levá strana pravidla musí obsahovat alespoň jeden neterminál

Příklad: gramatika pro zápis celých čísel

Příklad

Mějme gramatiku $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ pro zápis celých čísel s pravidly:

$$
\begin{aligned}
S &\to -I \mid +I \mid I \\
I &\to DI \mid D \\
D &\to 0 \mid \ldots \mid 9
\end{aligned}
$$

- $N = \{S, I, D\}$, kde neterminály obvykle značíme velkými písmeny,
- $\Sigma = \{0, \ldots, 9, +, -\}$, terminály zde reprezentují číslice a znaménka,
- $P = \{\langle S, -I\rangle, \langle S, +I\rangle, \ldots, \langle D, 9\rangle\}$, kde předchozí zápis P čteme jako:
  - pravidla se stejnou levou stranou sloučíme na jeden řádek, pak namísto $A \to \alpha_1, \ldots, A \to \alpha_n$ píšeme jen $A \to \alpha_1 \mid \ldots \mid \alpha_n$ (pravidla oddělujeme pomocí '|'),
  - první řádek je vyhrazen pro pravidla startovního neterminálu,
- S obvykle označuje startovní neterminál.

Relace přímého odvození

Intuice: na řetězec obsahující alepsoň jeden neterminál aplikujeme pravidlo gramatiky, čímž provedeme jeden krok odvození.

Definice

Binární relaci **přímého odvození** $\gamma \Rightarrow_{\mathcal{G}} \delta$ v CFG $\mathcal{G}$ definujeme jako aplikaci konkrétního pravidla na řetězec $\gamma = \eta\alpha\rho$, jehož výsledkem je řetězec $\delta = \eta\beta\rho$, neboli:

$$\eta\alpha\rho \Rightarrow_{\mathcal{G}} \eta\beta\rho$$

kde $\eta, \rho \in (\Sigma \cup N)^*$ a $\alpha \to \beta$ je právě aplikované pravidlo gramatiky $\mathcal{G}$ (pokud je gramatika zřejmá z kontextu, pak můžeme označení $\mathcal{G}$ u šipky vynechat).

- **větná forma** je libovolný řetězec terminálů a neterminálů
- **derivace** označuje proces, kdy na řetězec aplikujeme konečný počet kroků odvození
  - většinou máme na výběr z několika pravidel, které lze v daném kroku odvozování aplikovat
  - jeden řetězec může mít více různých způsobů odvození

Odvození v k krocích

Definice

Odvození v $k \in \mathbb{N}_0$ krocích v $\mathcal{G}$ definujeme induktivně jako relaci $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k}$:

- $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{0}$ je identita,
- $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k+1} = \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k} \circ \Rightarrow_{\mathcal{G}}$.

Pomocí toho můžeme definovat další užitečné relace:

- **odvození v nejvýše k krocích**:

$$\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{\leq k} = \bigcup_{i=0}^{k} \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{i}$$

- relace **odvození**:

$$\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{*} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{i}$$

- relace **netriviálního odvození**:

$$\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{+} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{i}$$

Příklad: derivace řetězce

Příklad

Mějme gramatiku $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ pro zápis celých čísel s pravidly:

$$S \to -I \mid +I \mid I$$
$$I \to DI \mid D$$
$$D \to 0 \mid \ldots \mid 9$$

Pak v $\mathcal{G}$ lze odvodit:

1. $S \Rightarrow -I \Rightarrow -DI \Rightarrow -DD \Rightarrow -4D \Rightarrow -42$
   - platí tedy $S \Rightarrow^5 42$ nebo $S \Rightarrow^3 -DD$
   - nebo $S \Rightarrow^* 42$
2. $S \Rightarrow -I \Rightarrow -DI \Rightarrow -4I \Rightarrow -4D \Rightarrow -42$
   - odvozujeme stejný řetězec jako v 1, ale změníme pořadí aplikování pravidel
3. $S \Rightarrow I \Rightarrow DI \Rightarrow DDI \Rightarrow DDD \Rightarrow 6DD \Rightarrow 66D \Rightarrow 666$
4. $S \Rightarrow^* w$, kde $w \in \Sigma^*$ (obsahuje jen terminály), pak w je zápis celého čísla

Jazyk generovaný gramatikou

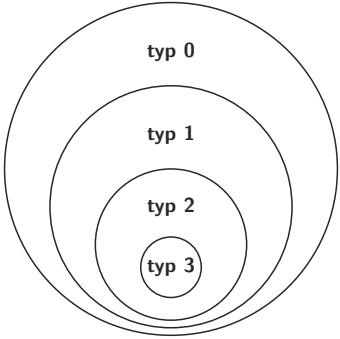
Intuice: gramatika popisuje všechny řetězce terminálů, které jsme schopni odvodit pomocí jejich pravidel v konečném počtu kroků.

Definice

Jazyk generovaný gramatikou $\mathcal{G}$ definujeme jako $L(\mathcal{G}) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_{\mathcal{G}}^* w\}$.

- řetězce v jazyku $L(\mathcal{G})$ už neobsahují neterminály
  - přítomnost neterminálu ve větné formě značí, že proces generování ještě neskončil
  - řetězce odvozené z gramatiky $\mathcal{G}$, které obsahují pouze terminály, se označují jako **věty** $\mathcal{G}$
- gramatiky $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ jsou jazykově ekvivaletní pokud $L(\mathcal{G}_1) = L(\mathcal{G}_2)$
- existují i jazyky/problémy (rozumně definované), které nelze popsat gramatikou

Chomského hierarchie



- vytvořil ji lingvista Noam Chomsky v roce 1956
- gramatiky lze rozdělit do čtyř skupin podle vlastností pravidel v P (a struktury jazyka):
  - **regulární gramatiky** (typ 3) jsou ekvivalentní s DFA
  - **bezkontextové gramatiky** (typ 2) generují jazyky zásobníkových automatů
  - **kontextové gramatiky** (typ 1) generují jazyky lineárně ohraničených automatů
  - **gramatiky bez omezení** (typ 0) generují jazyky *rozponávané* Turingovými stroji
- kromě toho rozděluje gramatiky i podle jejich popisné síly

Regulární gramatika (typ 3)

Intuice: vhodným omezením tvaru pravidel gramatiky získáme další model, který popisuje/generuje regulární jazyky.

Definice

Regulární gramatika (RG z *regular grammar*) $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ má všechna pravidla v jednom z těchto tvarů:

1. $A \to aB$ (neterminál generuje jeden terminál následovaný jedním neterminálem),
2. $A \to a$ (neterminál generuje pouze jeden terminál),
3. $S \to \varepsilon$, pokud se S nevyskytuje na pravé straně jakéhokoliv pravidla (pouze počáteční neterminál může generovat generovat prázdný řetězec).

- takto definovaná regulární gramatika je **pravolineární** (podle tvaru pravidel v 1)
  - analogicky lze definovat **levolineární** RG s pravidly 1 ve tvaru $A \to Ba$
  - levolineární a pravolineární gramatiky jsou ekvivalentní
  - v RG nesmíme míchat levolineární a pravolineární pravidla, tím zvýšíme sílu gramatiky

Příklad: regulární gramatika

Příklad

RG $\mathcal{G}_1 = (\{S, D\}, \{0, \ldots, 9, +, -\}, P, S)$ pro popis celých čísel s pravidly:

$$S \to +D \mid -D \mid 0D \mid \ldots \mid 9D \mid 0 \mid \ldots \mid 9$$
$$D \to 0D \mid \ldots \mid 9D \mid 0 \mid \ldots \mid 9$$

Příklad

Gramatika $\mathcal{G}_2 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, která **není regulární**:

$$S \to aA \mid aB$$
$$A \to Sb$$
$$B \to b$$

protože používá levolineární i pravolineární pravidla a navíc generuje neregulární jazyk $L(\mathcal{G}_2) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Ekvivalence RG a DFA

Věta

Ke každému DFA A existuje RG $\mathcal{G}$, tak že $L(A) = L(\mathcal{G})$.

Důkaz

Mějme RG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ a sestrojíme NFA $A = (N \cup \{q_f\}, \Sigma, \delta, S, F)$, kde:

- A má jeden stav pro každý neterminál $B \in N$ a navíc jeden stav q_f,
- počáteční stav S odpovídá počátečnímu neterminálu,
- F obsahuje stav q_f, a pokud $\mathcal{G}$ obsahuje pravidlo $S \to \varepsilon$, pak i $S \in F$,
- pro každé pravidlo $A \to aB$ přidáme přechod $\delta(A, a) = B$ a pro pravidla ve tvaru $A \to a$ přidáme přechod $\delta(A, a) = q_f$.

Lze ukázat, že platí $S \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{*} w$ právě když $\delta(S, w) \in F$, a tedy $L(\mathcal{G}) = L(A)$. □

Věta

Ke každé RG $\mathcal{G}$ existuje DFA A, tak že $L(A) = L(\mathcal{G})$. □

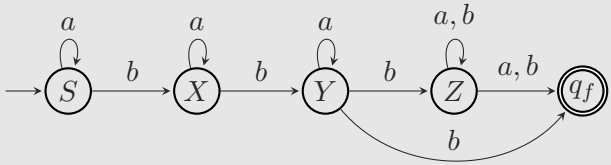
Příklad: převod RG na NFA

Příklad

Mějme gramatiku $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ s pravidly:

$$
\begin{aligned}
S &\to aS \mid bX \\
X &\to aX \mid bY \\
Y &\to aY \mid bZ \mid b \\
Z &\to aZ \mid bZ \mid a \mid b
\end{aligned}
$$

generující jazyk $L(\mathcal{G}) = \{w \in \Sigma^* \mid w$ obsahuje alespoň 3 znaky $b\}$. Z $\mathcal{G}$ zkonstruujeme NFA $A = (\{S, X, Y, Z, q_f\}, \{a, b\}, \delta, S, \{q_f\})$ takový, že $L(A) = L(\mathcal{G})$:



Motivační příklad: bezkontextová gramatika

Příklad

Formálně popíšeme lispové výrazy, které obsahují `if` a aritmetiku na celých číslech:

$$
\begin{aligned}
\langle exprs \rangle &\to \langle expr \rangle \mid \langle expr \rangle\ \langle exprs \rangle \mid \varepsilon \\
\langle expr \rangle &\to \langle num \rangle \mid (\langle func \rangle\ \langle exprs \rangle) \mid (\langle if \rangle) \\
\langle if \rangle &\to \texttt{if}\ \langle expr \rangle\ \langle expr \rangle \mid \texttt{if}\ \langle expr \rangle\ \langle expr \rangle\ \langle expr \rangle \\
\langle func \rangle &\to \texttt{=} \mid \texttt{<} \mid \texttt{>} \mid \texttt{<=} \mid \texttt{>=} \mid \texttt{+} \mid \texttt{-} \mid \texttt{*} \mid \texttt{/} \\
\langle num \rangle &\to 0\langle num \rangle \mid \ldots \mid 9\langle num \rangle \mid 0 \mid \ldots \mid 9
\end{aligned}
$$

Příklad odvození:

- $\langle exprs \rangle \Rightarrow^* (\texttt{/}\ 5\ 7)$
- $\langle exprs \rangle \Rightarrow^* (\texttt{+}\ 12\ 34\ 56\ 78)$
- $\langle exprs \rangle \Rightarrow^* (\texttt{if}\ (\texttt{=}\ 1\ 1)\ 42)$
- $\langle exprs \rangle \Rightarrow^* (\texttt{if}\ (\texttt{if}\ (\texttt{<}\ 0\ (\texttt{*}\ 6\ 6\ 6))\ 100\ (\texttt{-}\ 100))\ 1\ 0)$

Příklad – pokračování

$$
\begin{aligned}
\langle exprs \rangle &\Rightarrow \langle expr \rangle \\
&\Rightarrow (\langle if \rangle) \\
&\Rightarrow (\texttt{if}\ \langle expr \rangle\ \langle expr \rangle) \\
&\Rightarrow (\texttt{if}\ (\langle func \rangle\ \langle exprs \rangle)\ \langle expr \rangle) \\
&\Rightarrow (\texttt{if}\ (\texttt{=}\ \langle exprs \rangle)\ \langle expr \rangle) \\
&\Rightarrow (\texttt{if}\ (\texttt{=}\ \langle expr \rangle\ \langle exprs \rangle)\ \langle expr \rangle) \\
&\Rightarrow (\texttt{if}\ (\texttt{=}\ \langle expr \rangle\ \langle expr \rangle)\ \langle expr \rangle) \\
&\Rightarrow (\texttt{if}\ (\texttt{=}\ \langle num \rangle\ \langle expr \rangle)\ \langle expr \rangle) \\
&\Rightarrow (\texttt{if}\ (\texttt{=}\ 1\ \langle expr \rangle)\ \langle expr \rangle) \\
&\Rightarrow (\texttt{if}\ (\texttt{=}\ 1\ \langle num \rangle)\ \langle expr \rangle) \\
&\Rightarrow (\texttt{if}\ (\texttt{=}\ 1\ 1)\ \langle expr \rangle) \\
&\Rightarrow (\texttt{if}\ (\texttt{=}\ 1\ 1)\ \langle num \rangle) \\
&\Rightarrow (\texttt{if}\ (\texttt{=}\ 1\ 1)\ 4\langle num \rangle) \\
&\Rightarrow (\texttt{if}\ (\texttt{=}\ 1\ 1)\ 42)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle expr \rangle &\rightarrow (\langle if \rangle) \\
\langle if \rangle &\rightarrow \texttt{if}\ \langle expr \rangle\ \langle expr \rangle \\
\langle expr \rangle &\rightarrow (\langle func \rangle\ \langle exprs \rangle) \\
\langle func \rangle &\rightarrow \texttt{=} \\
\langle exprs \rangle &\rightarrow \langle expr \rangle\ \langle exprs \rangle \\
\langle exprs \rangle &\rightarrow \varepsilon \\
\langle expr \rangle &\rightarrow \langle num \rangle \\
\langle num \rangle &\rightarrow 1 \\
\langle expr \rangle &\rightarrow \langle num \rangle \\
\langle num \rangle &\rightarrow 1 \\
\langle expr \rangle &\rightarrow \langle num \rangle \\
\langle num \rangle &\rightarrow 4\langle num \rangle \\
\langle num \rangle &\rightarrow 2
\end{aligned}
$$

Bezkontextová gramatika (typ 2)

Intuice: pravidla bezkontextových gramatik umožňují z neterminálu odvodit libovolný řetězec terminálů a neterminálů.

Definice

Bezkontextová gramatika (CFG z *context-free grammar*) $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ má všechna pravidla ve tvaru:

- $A \to (\Sigma \cup N)^*$

- název bezkontextová vychází z toho, že přepisujeme neterminál bez ohledu na kontext, tedy symboly/řetězce v okolí neterminálu (to umí až kontextové gramatiky)
- L je **bezkontextový jazyk** pokud existuje CFG $\mathcal{G}$ taková, že $L(\mathcal{G}) = L$
  - bezkontextové jazyky budeme značit CFL (z *context-free language*)
- gramatika je bezkontextová jen na základě tvaru svých pravidel
  - musíme rozlišovat typ gramatiky a typ jejího jazyka
  - jazyk CFG totiž může být regulární (existuje jiná regulární gramatika se stejným jazykem)

Další příklady CFG

Příklad

CFG $\mathcal{G}_1 = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidly:

$$S \to \varepsilon \mid AbAbAS$$
$$A \to AA \mid a \mid \varepsilon$$

generuje jazyk $L(\mathcal{G}_1) = \{w \in \Sigma^* \mid w$ obsahuje sudý počet znaků $b\}$, který je regulární.

Příklad

CFG $\mathcal{G}_2 = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidly $S \to \varepsilon \mid aSb$ s jazykem $L(\mathcal{G}_2) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Příklad

CFG $\mathcal{G}_3 = (\{S\}, \{a, \ldots, z\}, P, S)$ s pravidly:

$$S \to \varepsilon \mid aSa \mid \ldots \mid zSz \mid a \mid \ldots \mid z$$

generuje jazyk palindromů, tj. $L(\mathcal{G}_3) = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^R\}$.

Nejlevější derivace

Definice

Derivaci nazveme **nejlevější**, pokud ve větné formě přepisujeme vždy nejlevější neterminál.

- nejlevější derivaci značíme $\Rightarrow_{lm}$ (jeden krok) a $\Rightarrow_{lm}^{k}$ (více kroků)
- analogicky můžeme definovat i nejpravější derivaci $\Rightarrow_{rm}$

Příklad

Mějme CFG $\mathcal{G}_1 = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidly

$$S \to \varepsilon \mid AbAbAS$$
$$A \to AA \mid a \mid \varepsilon$$

- $S \Rightarrow_{lm} AbAbAS \Rightarrow_{lm} abAbAS \Rightarrow_{lm} abbAS \Rightarrow_{lm} abbaS \Rightarrow_{lm} abba$
- $S \Rightarrow_{rm} AbAbAS \Rightarrow_{rm} AbAbA \Rightarrow_{rm} AbAba \Rightarrow_{rm} Abba \Rightarrow_{rm} abba$
- $S \Rightarrow AbAbAS \Rightarrow AbbAS \Rightarrow AbbA \Rightarrow Abb \Rightarrow bb$ (není ani nejlevější ani nejpravější derivace řetězce bb)

Derivační strom

Intuice: derivační strom je grafická reprezentace odvození nějakého řetězce v CFG.

Definice

Strom T nazveme **derivačním stromem** řetězce $\alpha \in (\Sigma \cup N)^*$ v CFG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$, právě když platí:

1. každý uzel je označen symbolem z $N \cup \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, přičemž kořen je označen S,
2. nelistové (vniřní) uzly jsou označeny pouze neterminály,
3. pokud má nelistový uzel označení $A \in N$ a jeho potomci zleva doprava označení $X_1, \ldots, X_k$, pak v $\mathcal{G}$ existuje pravidlo $A \to X_1 \ldots X_k$,
4. pokud je uzel označen ε, pak je list a nemá žádné sourozence,
5. zřetězením listových uzlů dostaneme α, neboli α je **derivace** stromu T.

- pro řetězec $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$ platí, že $S \Rightarrow_{\mathcal{G}}^* \alpha$ právě když existuje strom v $\mathcal{G}$ s derivací α
- každému derivačnímu stromu odpovídá jediná levá (případně pravá) derivace

Příklad: derivační strom

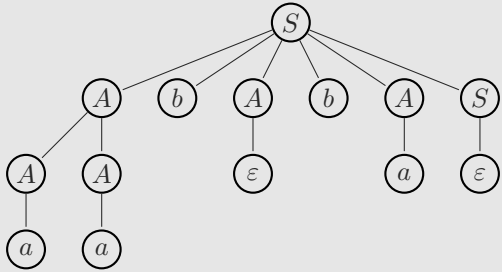
Příklad

Mějme CFG $\mathcal{G}_1 = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidly

$$S \to \varepsilon \mid AbAbAS$$
$$A \to AA \mid a \mid \varepsilon$$

a derivaci řetězce $aabba \in L(\mathcal{G}_1)$ a k ní sestavený derivační strom:

$S \Rightarrow AbAbAS \Rightarrow AAbAbAS \Rightarrow aAbAbAS \Rightarrow aabAbAS \Rightarrow aabbAS \Rightarrow aabbaS \Rightarrow aabba$



Víceznačnost CFG a CFL

Intuice: pro určení významu nebo korektnosti některých vět je potřeba mít konkrétní derivační strom (například s nějakou vlastností), proto třídu bezkontextových jazyků dělíme podle unikátnosti derivačních stromů.

Definice

Bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$ je **víceznačná** (nejednoznačná) pokud existuje slovo $w \in L(\mathcal{G})$, které má dva různé derivační stromy. V opačném případě je **jednoznačná**.

Definice

Bezkontextový jazyk je **dědičně víceznačný**, pokud každá gramatika, která jej generuje, je víceznačná.

- příklad dědičně víceznačného jazyka je $\{a^i b^j c^k \mid i = j \vee j = k\})$
- je potřeba rozlišovat mezi víceznačností jazyka a gramatiky
- neexistuje způsob jak algoritmicky ověřit, že CFG je víceznačná

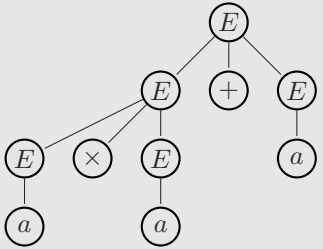
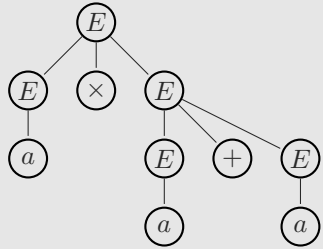
Příklad: víceznačnost

Příklad

Mějme gramatiku $\mathcal{G} = (\{E\}, \{+, -, a, (,)\}, P, S)$ s pravidly:

$$E \to E + E \mid E \times E \mid (E) \mid a$$

řetězec $a \times a + a \in L(\mathcal{G})$ má dvě různé derivace, a tedy i dva derivační stromy:

1. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E \times E + E \Rightarrow a \times E + E \Rightarrow a \times a + E \Rightarrow a \times a + a$
2. $E \Rightarrow E \times E \Rightarrow E \times E + E \Rightarrow a \times E + E \Rightarrow a \times a + E \Rightarrow a \times a + a$

Jazyk $L(\mathcal{G})$ není dědičně víceznačný, tj. existuje jednoznačná gramtika, která jej generuje.