Jiří Balun

Formální jazyky a automaty

Katedra informatiky, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci

Obsah

1 Abeceda a řetězce

- **abeceda** je konečná (neprázdná) množina znaků, značí se Σ (příklady?)
- **řetězec** s nad abecedou Σ je libovolná konečná posloupnost znaků abecedy
- délka řetězce s se značí $|s|$; prázdný řetězec se značí ε a tedy $|\varepsilon| = 0$
- například pro řetězec $s = s_1 \dots s_n$ (kde $s_i \in \Sigma$ pro $i = 1, \dots, n$) je $|s| = n$
- Σ^* značí množinu všech řetězců nad abecedou Σ
- Σ^+ je množina všech neprázdných řetězců nad abecedou Σ
- například pro $\Sigma = \{0, 1\}$ je:
  - $\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001 \dots\}$
  - $\Sigma^+ = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001 \dots\}$

  poznámka: řetězce pro přehlednost píšeme v tzv. **lexikografickém** uspořádání
- **zřetězení** dvou řetězců $x = x_1 \dots x_n$ a $y = y_1 \dots y_m$ se značí $x \cdot y$ nebo zkráceně xy

$$xy = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m$$

- triviálně platí tyto vztahy:

$$|xy| =$$
$$x \cdot \varepsilon =$$

- pro řetězce platí $x = y$, právě když $|x| = |y|$ a zároveň $x_i = y_i$ pro všechna $i = 1, \dots, |x|$
- **mocnina** řetězce x^n je definována rekurzivně:

$$x^n = \Big\{$$

- **prefix** a **sufix** řetězce:
  - $Pfx(x) =$
  - $Sfx(x) =$
- **reverz** řetězce $x = x_1 \dots x_n$ značíme $x^R = x_n \dots x_1$
- mějme řetězece $x = abb$, $y = ca$; doplňte:
  1. $xy =$
  2. $yx =$
  3. $y^3x =$
  4. $y(x^2y)^Rx =$
  5. $Pfx(x) =$
  6. $Sfx(x) =$

2 Jazyk

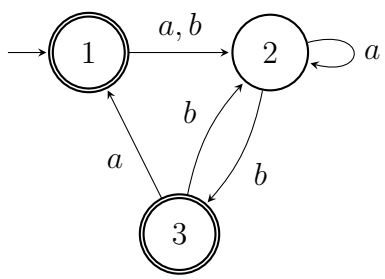
- **jazyk** je množina řetězců nad zvolenou abecedou Σ, neboli pro jazyk L platí $L \subseteq \Sigma^*$
- **zřetězení jazyků** $L_1 \cdot L_2 =$
- jaký je rozdíl mezi jazyky $\emptyset$ a $\{\varepsilon\}$? Jak dopadnou výrazy:
  1. $\emptyset \cdot \{a\} =$
  2. $\{\varepsilon\} \cdot \{a\} =$
- mějme $L_1 = \{b, aa\}$, $L_2 = \{\varepsilon, aab\}$ a $L_3 = \{\varepsilon, b\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$; doplňte:
  1. $L_1 \cdot L_2 =$
  2. $L_2 \cdot L_1 =$
  3. $\{\varepsilon\} \cdot L_1 =$
  4. $L_1 \cup L_2 =$
  5. $\overline{L_1} =$
  6. $(L_1 \cap L_3) \cdot (L_2 \setminus L_3) =$
- **mocnina jazyka**:

  $$L^n = \Big\{$$

- **uzávěry jazyků**:
  - $L^* =$
  - $L^+ =$
- mějme jazyky $L_1 = \{a, b, aa\}$ a $L_2 = \{\varepsilon, bb\}$; doplňte:
  1. $L_1^0 =$
  2. $L_1^1 =$
  3. $L_1^2 =$
  4. $L_2^* =$
  5. $\{\varepsilon\}^* =$
  6. $\{\varepsilon\}^+ =$
  7. $\emptyset^* =$
  8. $\emptyset^+ =$
- rozhodněte zda platí vztah $(L^R)^* = (L^*)^R$, kde $L^R = \{x^R \mid x \in L\}$ je reverz jazyka

3 Konečný deterministický automat (DFA)

- **konečný deterministický automat**, zkráceně **DFA**(*deterministic finite automaton*) je reprezentován uspořádanou pěticí $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde:
  1. Q je konečná množina stavů (proto název *konečný* automat)
  2. Σ je abeceda
  3. δ je přechodová funkce ve tvaru $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, která stavu a symbolu přiřadí nějaký stav
  4. q_0 je počáteční stav (platí pro něj $q_0 \in Q$)
  5. F je množina koncových/akceptujících stavů (platí pro ně $F \subseteq Q$),
- takto definovaný automat je **deterministický**, protože se v každém kroku výpočtu nachází právě v jednom stavu (později si ukážeme i nedeterministické modely)
- přechodová funkce je **úplná**, pokud je $\delta(q, a)$ definovaná pro všechny $q \in Q$ a $a \in \Sigma$; budeme uvažovat pouze DFA s úplnou přechodovou funkcí
- grafická reprezentace konečných automatů pomoci grafu:
  - stavy jsou reprezentované jako uzly
  - počáteční stav je označený šipkou směřující k uzlu
  - koncové stavy jsou označené dvojitým uzlem
  - každý přechod je reprezentovaný orientovanou hranou, jejíž popisek (jeden nebo více symbolů abecedy) udává, který symbol realizuje přechod mezi počátečním a koncovým uzlem dané hrany
- podle grafu automatu A_1 doplňte:



1. $Q =$
2. $\Sigma =$
3. $q_0 =$
4. $F =$
5. $\delta(1, a) =$
6. $\delta(2, a) =$
7. $\delta(2, b) =$
8. $\delta(\delta(\delta(1, b), a), b) =$
9. $\delta(\delta(\delta(1, a), b), a) =$
10. $\delta(\delta(\delta(\delta(1, b), b), a), a) =$

4 Reprezentace DFA

- přechodovou funkci δ lze zapsat pomocí relace $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$, tedy jako množinu uspořádaných trojic, kde $\langle p, a, q\rangle \in \delta$ odpovídá přechodu $\delta(p, a) = q$
- mějme DFA $A_1 = (\{1, 2, 3\}, \{a, b\}, \delta, 1, \{3\})$, jehož přechodová funkce je zadaná jako relace $\delta = \{\langle 1, a, 1\rangle, \langle 1, b, 2\rangle, \langle 2, a, 2\rangle, \langle 2, b, 3\rangle, \langle 3, a, 3\rangle, \langle 3, b, 3\rangle\}$; takto zadaný automat lze reprezentovat:

  1. **grafem** – stavy jsou uzly, přičemž počáteční stav je označen šipkou a koncové stavy jsou označeny dvojitým uzlem; orientované hrany jsou přechody, kde hrana z p do q s popiskem a značí přechod $\delta(p, a) = q$

  2. **tabulkou** – první sloupce udává stavy automatu, počáteční stav je opět označen šipkou a koncové stavy hvězdou; další sloupce pak udávají výsledky přechodu pro jednotlivé symboly abecedy

  3. **v počítači** – jednoduchá implementace v LISPu může vypadat následovně:

```lisp
(defun DFA (delta q0 F)
  (let ((state q0))
    (labels ((st-cmp (a transition)
               (and (equal (car transition) state)
                    (equal (second transition) a))))
      (lambda (&optional a)
        (values
         (setf state (if a     ;; 1st value is resulting state
                         (third (find a delta :test #'st-cmp))
                         state))    ;; no input, return actual state
         (find state F))))))  ;; 2nd value is non-NIL for final state

(defvar A (DFA '((1 a 1) (1 b 2) (2 a 2) (2 b 3) (3 a 3) (3 b 3)) 1 '(3)))
```

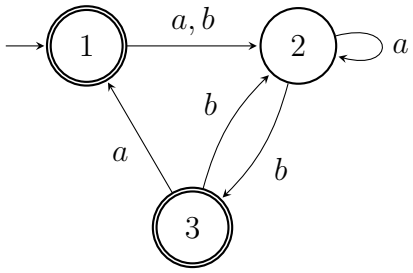
```
CL-USER> (funcall A 'b)
2
NIL      ⇐ stav 2 není koncový
CL-USER> (funcall A 'b)
3
3        ⇐ stav 3 je koncový
```

5 Jazyk DFA

- definujeme si **rozšířenou přechodovou funkci** $\hat{\delta}$, kde $q \in Q$ a $s = s_1 \dots s_n \in \Sigma^*$:

$$\hat{\delta}(q, s) = \Bigg\{$$

- jaký je výsledek přechodů v následujcícím automatu, a které z nich přijme?



1. $\hat{\delta}(1, aabbaa) =$
2. $\hat{\delta}(1, abaa) =$
3. $\hat{\delta}(1, abbab) =$

- každý DFA A rozpoznává nějaký jazyk, který budeme značit $L(A)$
- pokud se A po přečtení slova s přesune z počátečního stavu do koncového stavu, pak s patří do $L(A)$; **jazyk DFA** formálně definujeme jako:

$$L(A) =$$

- jazyk nazveme **regulární**, pokud existuje DFA, který jej rozpoznává
- jaký je jazyk automatu A_1 ze Sekce 4?

6 Konstrukce DFA

Navhrněte automaty rozponávající jazyky:

- $L_1 = \{\varepsilon\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$; jak by vypadal automat pro jazyky $\emptyset$ a Σ^*?

- $L_2 = \{a, b, ca, cb, cc, abc\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$

- $L_3 = \{s \mid s$ začíná řetězcem $abb\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$

- $L_4 = \{s \mid s$ obsahuje sudý počet znaků $a\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$

- $L_5 = \{s \mid s$ začíná a končí znakem $a\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$

- $L_6 = \{a\}^* \cup \{b\}^*$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$

- $L_7 = \{s \mid s$ obsahuje podřetězec $abab\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$

- $L_8 = \{s \mid s$ neobsahuje podřetězec $abab\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$

- $L_9 = \{s \mid$ součet hodnot znaků s je dělitelný číslem 4 beze zbytku$\}$ nad abecedou $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$ (součet prázdné sekvence je 0, a tedy $\varepsilon \in L_9$)

7 Konečný nedeterministický automat (NFA)

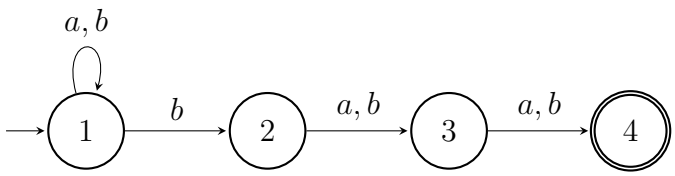
- konečný nedeterministický automat **NFA** (*nondeterministic fininite automaton*) je reprezentován uspořádanou pěticí $A = (Q, \Sigma, \delta_N, q_0, F)$
- v definici NFA je oproti DFA jediná změna, a to v přechodové funkci, která je nyní ve tvaru $\delta_N \colon Q \times \Sigma \to 2^Q$ (pokud je z kontextu jasné, že se jedná o NFA, budeme psát jen δ místo δ_N)
- NFA se může nacházet ve více stavech najednou (alternativně lze nedeterminismus chápat jako schopnost „uhádnout“ ten správný přechod)
- výsledek přechodu z δ_N je tedy množina stavů – klidně i prázdná množina, proto v NFA už nemusí mít úplnou přechodovou funkci
- rozšířená přechodová funkce $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$, kde $q \in Q$ a $s = s_1 \dots s_n \in \Sigma^*$:

$$\hat{\delta}_N(q, s) = \begin{cases} \{q\} & \text{pro } s = \varepsilon \\ \bigcup_{p \in \hat{\delta}_N(q, s_1 \dots s_{n-1})} \delta_N(p, s_n) & \text{pro } |s| > 0 \end{cases}$$

- pokud se NFA A po přečtení slova s přesune z počátečního stavu aspoň do jednoho koncového stavu, pak slovo s patří do $L(A)$; **jazyk NFA** formálně zapíšeme jako:

$$L(A) =$$

- NFA rozpoznávají regulární jazyky, tedy stejné jazyky jako rozpoznávají DFA
- mějme zadán následující automat A_1:



1. $\hat{\delta}_N(1, abab) =$
2. $\hat{\delta}_N(1, bbbaab) =$
3. jaký je jazyk $L(A_1)$?

8 Konstrukce NFA

- navrhněte NFA pro následující jazyky:
  - $L_1 = \{c, ab, ba, abc, bcb\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$
  - $L_2 = \{s \in \{a, b, c\}^* \mid s$ obsahuje podslovo $abbc, acbc$ nebo $bcab\}$
  - $L_3 = \{ab\}^* \cup \{abb\}^*$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$
  - $L_4 = \{s \in \{a, b\}^* \mid s$ má sudý počet znaků a nebo přesně dva znaky $b\}$

9 Determinizace NFA

- existuje NFA rozponávající jazyk L právě tehdy, když existuje DFA rozponávájící L:

  ($\Leftarrow$) každý DFA je zároveň NFA (jen změníme $\delta(q, a) = p$ na $\delta_N(q, a) = \{p\}$)

  ($\Rightarrow$) *determinizace* – ke každému NFA lze sestrojit DFA rozponávájící stejný jazyk

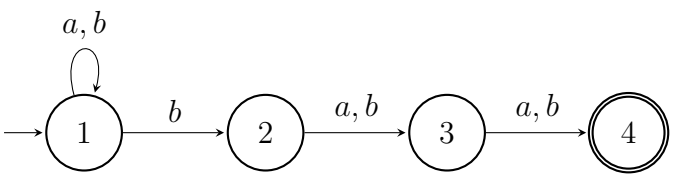
- **Podmnožinová konstrukce:** k NFA $N = (Q, \Sigma, \delta_N, q_0, F)$ sestavíme DFA $D = (2^Q, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F')$, tak aby platilo $L(N) = L(D)$:

  1. stavy D jsou podmnožiny Q
  2. počáteční stav je $\{q_0\}$, množina obsahující původní počáteční stav q_0
  3. koncové stavy jsou podmnožiny Q obsahující aspoň jeden původní koncový stav, tedy $F' = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$
  4. δ_D je determinisitcká přechodová funkce definovaná jako:

$$\delta_D(\{q_1, \ldots, q_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(q_i, a)$$

- D má $2^{|Q|}$ stavů, ale nám stačí jen dosažitelné stavy (ke každému automatu existuje automat, který rozponává stejný jazyk, ale má jen dosažitelné stavy)

- determinizujte automat A_1:



10 NFA s ε-přechody

- rozšířením modelu NFA o ε-přechody získáme ε-NFA $A = (Q, \Sigma, \delta_E, q_0, F)$, který navíc umožňuje i přechody bez přečtení symbolu ze vstupu
- jediná změna je opět v přechodové funkci, která má tvar $\delta_E \colon Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$
- ε-NFA rozpoznávají regulární jazyky, stejně jako NFA a DFA
- NFA se často definují s množinou počátečních stavů $I \subseteq Q$; každý takový NFA lze upravit na ε-NFA, tak aby měl pouze jeden počáteční stav:
  1. vytvoříme nový počáteční stav q_0
  2. pro každý stav $p \in I$ přidáme přechod $\langle q_0, \varepsilon, p \rangle$
- ε-uzávěr $E(S)$ je množina dosažitelných stavů pomocí ε-přechodů ze stavů v $S \subseteq Q$
- **převod ε-NFA na NFA**:
  1. pro každý stav $q \in Q$ vypočítáme ε-uzávěr $E_q = E(\{q\})$
  2. výpočítáme δ_N z δ_E pro každý stav $q \in Q$ a symbol $a \in \Sigma$:

$$\delta_N(q, a) = E\Big(\bigcup_{p \in E_q} \delta_E(p, a) \Big)$$

  3. označ jako koncový stav q_0 pokud platí $E(\{q_0\}) \cap F \neq \emptyset$
- převeďte následující ε-NFA A_1 na NFA bez ε-přechodů:

δ_E	ε	a	b
$\to 1$	$\{3\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
2	$\emptyset$	$\{4\}$	$\{2\}$
$3\star$	$\{4\}$	$\emptyset$	$\{3\}$
4	$\emptyset$	$\{2, 3\}$	$\emptyset$

δ_N	E_q	a	b

11 Součinový DFA

- součinový/produktový DFA simuluje běh více DFA zároveň
- tuto konstrukci lze použít k vytvoření DFA, který rozpoznává průnik nebo sjednocení regulárních jazyků, nebo k ověření ekvivalence a inkluze regulárních jazyků
- **Konstrukce:** pro dva DFA $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{0,1}, F_1)$ a $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{0,2}, F_2)$ vytvoříme součinový DFA jako $A_1 \times A_2 = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta', \langle q_{0,1}, q_{0,2}\rangle, F')$, kde:
  - množina stavů obsahuje všechny dvojice stavů $\langle q_1, q_2\rangle$, kde $q_1 \in Q_1$ a $q_2 \in Q_2$
  - abeceda zůstává stejná (oba automaty A_1 a A_2 musí být nad stejnou abecedou)
  - $\delta'(\langle q_1, q_2\rangle, a) = \langle \delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a)\rangle$ pro všechna $a \in \Sigma$
  - počáteční stav $\langle q_{0,1}, q_{0,2}\rangle$ je dvojice počátečních stavů z A_1 a A_2
  - množinu koncových stavů F' zvolíme podle účelu $A_1 \times A_2$
- **Volba koncových stavů:** nechť $L_1 = L(A_1)$ a $L_2 = L(A_2)$, pak:
  - pro ověření $L_1 = L_2$ (tj. platí $L_1 = L_2$ právě když $L(A_1 \times A_2) = \emptyset$) zvolíme:

    $$F' = \{\langle q_1, q_2\rangle \mid (q_1 \in F_1 \wedge q_2 \notin F_2) \vee (q_1 \notin F_1 \wedge q_2 \in F_2)\}$$

    poznámka: pro ověření $L_1 \subseteq L_2$ použijeme jen první část této podmínky
  - pro rozpoznání $L(A_1 \times A_2) = L_1 \cap L_2$ zvolíme $F' = \{\langle q_1, q_2\rangle \mid q_1 \in F_1 \wedge q_2 \in F_2\}$
  - pro rozpoznání $L(A_1 \times A_2) = L_1 \cup L_2$ zvolíme $F' = \{\langle q_1, q_2\rangle \mid q_1 \in F_1 \vee q_2 \in F_2\}$
  - pro rozpoznání $L(A_1 \times A_2) = L_1 \setminus L_2$ zvolíme $F' = \{\langle q_1, q_2\rangle \mid q_1 \in F_1 \wedge q_2 \notin F_2\}$
- sestrojte součinový DFA pro jazyk nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$:
  - $\{s \mid s$ obsahuje podřetězec aba$\} \cap \{s \mid s$ neobsahuje podřetězec bb$\}$

12 Minimalizace DFA

- chceme k zadanému DFA A najít ekvivalentní DFA A_m s nejmenším počtem stavů
- stavy $p, q \in Q$ v DFA A jsou nerozlišitelné, právě když pro $\forall w \in \Sigma^*$ platí:

$$\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F$$

- nerozlišitelnost stavů '$\equiv$' je binární relace na množině stavů Q, která je navíc ekvivalence (ověřte, že $\equiv$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní)
- pro stavy výsledného minimálního DFA A_m platí, že jsou to třídy $\equiv$ a množina stavů A_m tvoří rozklad Q podle $\equiv$ (předpokládáme, že A nemá nedosažitelné stavy)
- **Konstrukce:** A_m lze vypočítat pomocí tabulky dvojic stavů, která zachycuje $\equiv$:
  - nejprve označíme všechny dvojice, které obsahují pouze jeden koncový stav (ty jsme schopni rozlišit hned na začátku)
  - postupně označujeme dvojice $\langle p, q \rangle$, pro které existuje $a \in \Sigma$ takové, že dvojice $\langle \delta(p, a), \delta(q, a) \rangle$ už je označena; tento krok opakujeme dokud ještě lze označit nějakou další dvojici
  - neoznačené dvojice nejsme schopni rozlišit a pomocí tranzitivního uzávěru vypočítáme celou odpovídající třídu $\equiv$, kterou v A_m sloučíme do jednoho stavu

  poznámka: není nutné počítat všechny políčka tabulky (reflexivita + symetrie)

- minimalizujte DFA zadaný tabulkou:

δ	a	b
$\rightarrow 1$	2	3
2	1	4
3$\star$	5	6
4$\star$	5	6
5$\star$	6	6
6	6	6

$\equiv$	1	2	3	4	5	6
$\rightarrow 1$	✓					
2	$\star$	✓				
3$\star$	$\star$	$\star$	✓			
4$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	✓		
5$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	✓	
6	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	✓

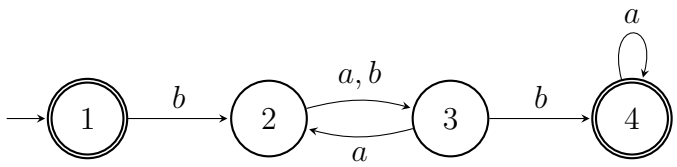
13 Pumping lemma

- užitečný nástroj, který umožňuje dokázat, že daný jazyk **není** regulární (neumožňuje dokázat, že jazyk je regulární)
- **Pumping lemma:** nechť L je regulární jazyk, pak existuje číslo $n \in \mathbb{N}$, tak že každý řetězec $w \in L$ délky aspoň n lze rozdělit na tři části $w = xyz$, které splňují:
  (1) $|y| > 0$
  (2) $|xy| \leq n$
  (3) $xy^iz \in L$ pro všechna $i \geq 0$
- pokud je jazyk L konečný (a tedy i regulární), pak lemma platí triviálně – n zvolíme větší než je délka nejdelšího řetězce v L
- **postup při použití lemma v důkazu sporem:**
  1. předpokládáme, že daný jazyk je regulární a tedy musí existovat $n \in \mathbb{N}$ z lemma (nikdy nevolíme konkrétní n, protože pokud L není regulární, n neexistuje)
  2. zvolíme vhodný řetězec w takový, že $|w| \geq n$ (w je tedy nějak vyjádřeno pomocí n; opět nikdy nevolíme konkrétní řetězec!)
  3. ukážeme, že pro každé rozdělení $xyz = w$ splňující podmínky (1) a (2) z lemma existuje i, tak že xy^iz nelze napumpovat dle bodu (3)
- dokažte, že jazyky nejsou regulární (popište celou úvahu!):
  1. $L_1 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$
  2. $L_2 = \{a^p \mid p \text{ je prvočíslo}\}$

14 Regulární výrazy (RE)

- regulární výraz (RE – *regular expression*) je další způsob jak zapsat regulární jazyk
- **definice RE nad abecedou Σ:**
  1. pro každý symbol $a \in \Sigma$ je $\boldsymbol{a}$ RE s jazykem $L(\boldsymbol{a}) = \{a\}$
  2. $\boldsymbol{\varepsilon}$ je RE s jazykem $L(\boldsymbol{\varepsilon}) = \{\varepsilon\}$
  3. $\boldsymbol{\emptyset}$ je RE s jazykem $L(\boldsymbol{\emptyset}) = \emptyset$
  4. nechť E_1 a E_2 jsou RE, pak $E_1{+}E_2$ je RE s jazykem $L(E_1{+}E_2) = L(E_1) \cup L(E_2)$
  5. nechť E_1 a E_2 jsou RE, pak E_1E_2 je RE s jazykem $L(E_1E_2) = L(E_1) \cdot L(E_2)$
  6. nechť E je RE, pak E^* je RE s jazykem $L(E^*) = (L(E))^*$
- priorita operátorů: nejvyšší má operace *, pak zřetězení $\cdot$, a nejnižší má operace $+$
- dále můžeme prioritu operací upravit dle libosti pomocí závorek
- pro přehlednější zápis dále zavedeme $\boldsymbol{\Sigma}$ jako RE, jehož jazyk obsahuje všechny symboly uvažované abecedy Σ
- vzhledem k tomu, že RE reprezentují regulární jazyky, je tento model opět ekvivalentní s DFA/NFA/ε-NFA
- příklad RE a NFA, které rozpoznávájí stejný jazyk:

$$\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}))^*\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^*$$



- navrhněte RE k následujícím jazykům:
  - $L_1 = \{s \in \{a, b\}^* \mid s$ neobsahuje podřetězce ab a $ba\}$
  - $L_2 = \{s \in \{a, b\}^* \mid s$ začíná i končí stejným řetězcem aa nebo $bb\}$
  - $L_3 = \{s \in \{a, b\}^* \mid s$ má sudý počet znaků a nebo přesně dva znaky $b\}$

15 Převod RE na ε-NFA

- ekvivalenci s ε-NFA ukážeme strukturální indukcí vzhledem ke složitosti RE (ke každému bodu definice RE najdeme ε-NFA se stejným jazykem):

1. $L(\boldsymbol{a}) = \{a\}$:

2. $L(\boldsymbol{\varepsilon}) = \{\varepsilon\}$:

3. $L(\boldsymbol{\emptyset}) = \emptyset$:

4. $L(E_1{+}E_2) = L(E_1) \cup L(E_2)$:

5. $L(E_1E_2) = L(E_1) \cdot L(E_2)$:

6. $L(E^*) = (L(E))^*$:

- převeďte RE na ε-NFA:

1. $(\boldsymbol{a}{+}\boldsymbol{ab})^*\boldsymbol{b}$

2. $\boldsymbol{\varepsilon} + (\boldsymbol{a}{+}\boldsymbol{b})^*\boldsymbol{c}(\boldsymbol{abc})^*$

16 Převod DFA na RE

- **Konstrukce:** nechť $A = (\{1, \ldots, n\}, \Sigma, \delta, 1, F)$ je DFA s n stavy (jsou označené čísly od 1 do n), pak RE R_A, pro který platí $L(R_A) = L(A)$, vypočítáme předpisem:

$$R_A = \sum_{f \in F} R^n_{1,f}$$

kde jednotlivé RE $R^n_{1,f}$ získáme jako:

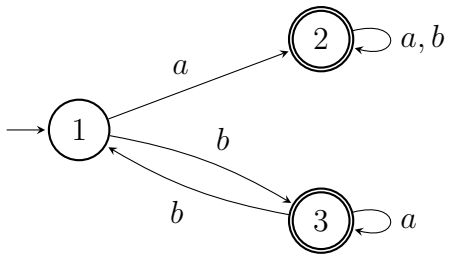
$$\begin{aligned} R^k_{ij} &= R^{k-1}_{ij} + R^{k-1}_{ik}(R^{k-1}_{kk})^* R^{k-1}_{kj} \\ R^0_{ij} &= \sum_{a \in \Sigma:\ \delta(i,a)=j} \boldsymbol{a} \qquad (\text{pro } i \neq j) \\ R^0_{ii} &= \boldsymbol{\varepsilon} + \sum_{a \in \Sigma:\ \delta(i,a)=i} \boldsymbol{a} \end{aligned}$$

výraz $R^k_{i,j}$ je RE, který popisuje množinu všech cest (grafem automatu) ze stavu i do stavu j přes stavy, jež jsou označené maximálně číslem k; výraz výpočítáme z jednodušších podvýrazů:

1. R^{k-1}_{ij} jsou cesty z i do j, které nevedou přes k
2. $R^{k-1}_{ik}(R^{k-1}_{kk})^* R^{k-1}_{kj}$ jsou cesty z i do j, které vedou přes k

výrazy, kde $k = 0$, slouží jako podmínka ukončující rekurzi (už jsme na úrovni jednotlivých přechodů mezi stavy)

- převeďte DFA na RE:



17 Homomorfismy jazyků

- **homomorfismus** na abecedě je funkce $h\colon \Sigma_1 \to \Sigma_2^*$, která přiřazuje každému symbolu z Σ_1 řetězec nad abecedou Σ_2
- h lze jednoduše definovat i pro řetězce, kde $h(w) = h(w_1)\dots h(w_n) \in \Sigma_2^*$ pro $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma_1^*$ (zobrazíme zvlášť každý symbol v řetězci w)
- homomorfismus můžeme dále rozšířit jako operaci nad jazyky, kde pro jazyk L nad Σ_1^* je $h(L) = \{y \in \Sigma_2^* \mid x \in L \wedge h(x) = y\}$
- **inverzní homomorfismus** definujeme jako $h^{-1}(y) = \{x \in \Sigma_1^* \mid h(x) = y\}$ a analogicky pro jazyky $h^{-1}(L) = \{x \in \Sigma_1^* \mid h(x) \in L\}$
- pokud je jazyk L regulární, pak $h(L)$ je také regulární (to samé platí i pro $h^{-1}(L)$)
- mějme abecedy $\Sigma_1 = \{a, b, c, d\}$ a $\Sigma_2 = \{0, 1, 2\}$ a homomorfismus $h_1\colon \Sigma_1 \to \Sigma_2^*$, kde $h_1(a) = 02$, $h_1(b) = 21$, $h_1(c) = 10$, $h_1(d) = \varepsilon$; určete:
  - $h_1(adbccdda) =$
  - $h_1^{-1}(0221) =$
  - $h_1(L)$, kde $L = \{a^n b^* c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- mějme abecedu $\Sigma = \{a, b, c\}$ a homomorfismus $h_2\colon \Sigma \to \Sigma^*$, kde $h_2(a) = aa, h_2(b) = ba$, $h_2(c) = a$; určete:
  - $h_2^{-1}(aabaaabaa) =$
  - $h_2(L)$, kde $L = \{a^p \mid p \text{ je prvočíslo}\}$
  - $h_2^{-1}(L)$, kde $L = \{w \in \{a\}^* \mid |w| = 2n, \text{ pro } n \in \mathbb{N}\}$
- pro $\Sigma_1 = \{0, 1\}$ a $\Sigma_2 = \{a\}$ zkuste najít homomorfismus $h\colon \Sigma_1 \to \Sigma_2^*$ takový, že pro všechna $w \in \Sigma_1^*$ platí $|h(w)| = 2^n$, kde $|w| = n$

18 Gramatiky a derivace

- gramatika je další způsob jak zapsat jazyk (**nejen regulární!** proto jsou gramatiky mnohem silnější nástroj než konečné automaty/RE)
- **Definice:** gramatika je reprezentována uspořádanou čtveřicí $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$, kde:
  1. N je množina neterminálů (značené jako velká písmena)
  2. Σ je množina terminálů (symboly abecedy), platí $\Sigma \cap N = \emptyset$
  3. P je množina pravidel ve tvaru $P \subseteq V^*NV^* \times V^*$, kde $V = N \cup \Sigma$
  4. S je počáteční neterminál
- **pravidlo** $\alpha \to \beta$ chápeme tak, že při jeho aplikaci se α přepíše na β
- relaci přímého odvození $\gamma \Rightarrow_{\mathcal{G}} \delta$ chápejme jako aplikaci konkrétního pravidla na řetězec $\gamma = \eta\alpha\rho$, jehož výsledkem je řetězec $\eta\beta\rho$, neboli:

  $$\eta\alpha\rho \Rightarrow_{\mathcal{G}} \eta\beta\rho$$

  kde $\eta, \rho \in V^*$ a $\alpha \to \beta$ je právě aplikované pravidlo gramatiky $\mathcal{G}$ (pokud je gramatika zřejmá z kontextu, pak můžeme označení $\mathcal{G}$ u šipky vynechat)
- $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^*$ umožňuje při odvození aplikovat libovolný počet libovolných pravidel (podobně $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^k$ umožňuje přesně k aplikací, $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{\leq k}$ maximálně k aplikací atd.)
- **derivace** označuje proces, kdy na řetězec aplikujeme konečný počet kroků odvození
- $\Rightarrow_{lm}$ značí nejlevější derivaci – přepisujeme vždy podle nejlevějšího neterminálu (analogicky $\Rightarrow_{rm}$ je nejpravější derivace)
- **jazyk generovaný gramatikou** $\mathcal{G}$ definujeme jako $L(\mathcal{G}) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_{\mathcal{G}}^* w\}$ (řetězce v jazyku $\mathcal{G}$ už neobsahují neterminály)
- mějme gramatiku $\mathcal{G}_1$ (ve zkrácené notaci – pravidla pro jeden neterminál jsou napsaná na jednom řádku oddělená pomocí '|'):

  $$\begin{aligned} S &\to XSX \mid R \\ R &\to aTb \mid bTa \\ T &\to XTX \mid X \mid \varepsilon \\ X &\to a \mid b \end{aligned}$$

  1. jaké jsou proměnné a terminály v $\mathcal{G}_1$?
  2. napište tři řetězce z $L(\mathcal{G}_1)$
  3. rozhodněte zda platí $S \Rightarrow^* aabba$
  4. rozhodněte zda platí $S \Rightarrow^* babbab$
  5. rozepište nejlevější derivaci $S \Rightarrow_{lm}^* ababab$

19 Regulární gramatika (typ 3)

- gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ je **regulární**, pokud jsou všechna pravidla ve tvaru:
  1. $A \to aB$ (neterminál generuje jeden terminál následovaný jedním neterminálem)
  2. $A \to a$ (neterminál generuje pouze jeden terminál)
  3. $S \to \varepsilon$, pokud se S nevyskytuje na pravé straně jakéhokoliv pravidla (pouze počáteční neterminál může generovat generovat prázdný řetězec)
- každá regulární gramatika $\mathcal{G}$ popisuje nějaký regulární jazyk, a proto lze převést na NFA $A_{\mathcal{G}} = (N \cup \{q_f\}, \Sigma, \delta, S, F)$, kde:
  - $A_{\mathcal{G}}$ má jeden stav pro každý neterminál $B \in N$ a navíc jeden stav q_f
  - počáteční stav S odpovídá stavu počátečního neterminálu
  - F obsahuje stav q_f, a pokud $\mathcal{G}$ obsahuje pravidlo $S \to \varepsilon$, pak i $S \in F$
  - pro každé pravidlo $A \to aB$ přidáme přechod $\delta(A, a) = B$ a pro pravidla ve tvaru $A \to a$ přidáme přechod $\delta(A, a) = q_f$
- navhrněte regulární gramatiky pro jazyky:

  $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \in \{0, 3, 5\}\}$

  $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ začíná a končí stejným řetězcem aa nebo $bb\}$

20 Bezkontextová gramatika (CFG, typ 2)

- gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ je bezkontextová (zkratka **CFG** z *context-free grammar*), pokud jsou všechna pravidla ve tvaru $A \to \alpha$, kde $\alpha \in (\Sigma \cup N)^*$, tedy neterminál generuje libovolný řetězec terminálů a neterminálů
- jazyk je **bezkontextový**, pokud jej generuje nějaká bezkontextová gramatika
- pokud je gramatika $\mathcal{G}$ bezkontextová, tak to nemusí znamenat, že jazyk $L(\mathcal{G})$ není regulární – množina jazyků, které lze generovat pomocí CFG, je totiž nadmnožinou regulárních jazyků (a podmnožinou kontextově závislých jazyků)
- navhrněte bezkontextové gramatiky pro jazyky:

  $L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w = w^R\}$

  $L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ obsahuje aspoň tři znaky } a\}$

  $L_3 = \{a^{3n+2}b^{2n} \mid n \geq 1\}$

  $L_4 = \{w \in \{p, \neg, \to, \vee, \wedge, (,), \texttt{true}, \texttt{false}\}^* \mid w \text{ je formule výrokové logiky}\}$

  příklad: "$\neg(p \wedge pp)$" $\in L_4$ a "$)(\vee p \wedge$" $\notin L_4$ ($p, pp, \ldots$ jsou různé proměnné)

  $L_5 = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$

$L_6 = \{w \in \{0, \ldots, 9, +, -, ., (,)\}^* \mid w$ je aritmetický výraz s desetinnými čísly$\}$

příklad: $"(-(-0.9))+(7.+.45-3.415)" \in L_6$ a $"-00.9", ".", "5++5" \notin L_6$

- navrhněte bezkontextovou gramatiku pro minimalistický Lisp, který bude umět:
  - definovat proměnné pomocí `defvar`, kde název obsahuje pouze znaky `a-z`
  - definovat funkce s pevným počtem parametrů pomocí `defun` a s názvem opět jen ze znaků `a-z`
  - provádět aritmetické operace $+, -, \cdot, /$ na celých číslech
  - konstrukce `car`, `cdr`, `cons`, `list`, `if`, `let` a `lambda`
  - pro jednoduchost uvažujte, že každý výraz musí být oddělen whitespacem ␣

21 Derivační stromy a víceznačnost CFG

- derivační strom je grafická reprezentace derivace (odvození) nějakého řetězce v CFG
- **Definice:** strom T nazveme derivačním stromem řetězce $\alpha \in (\Sigma \cup N)^*$ podle CFG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$, právě když platí:
  1. každý uzel je označen symbolem z $N \cup \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, přičemž kořen je označen S
  2. nelistové (vniřní) uzly jsou označeny pouze neterminály
  3. pokud má nelistový uzel označení $A \in N$ a jeho potomci zleva doprava označení $X_1, \ldots, X_k$, pak v $\mathcal{G}$ existuje pravidlo $A \to X_1 \ldots X_k$
  4. pokud je uzel označen ε, pak je list a nemá žádné sourozence
  5. zřetězením listových uzlů dostaneme α, neboli α je *derivace* stromu T
- CFG $\mathcal{G}$ je **víceznačná/nejednoznačná**, pokud existuje řetězec $S \Rightarrow^* \alpha$, který je derivací aspoň dvou různých derivačních stromů
- bezkontextový jazyk je **jednoznačný**, pokud existuje jednoznačná gramatika, která jej generuje (je rozdíl mezi jednoznačností gramatiky a jazyka, který generuje)
- pro některé bezkontextové jazyky neexistuje jednoznačná gramatika, takový jazyk je **dědičně víceznačný** (např. jazyk $\{a^i b^j c^k \mid i = j \vee j = k\}$)
- mějme víceznačnou gramatiku $\mathcal{G}_1 = (\{E\}, \{a, +, \times, (,)\}, P, E)$:

$$E \to E + E \mid E \times E \mid (E) \mid a$$

  1. sestavte derivační strom k řetězci $((a))$
  2. sestavte derivační strom k řetězci $(a \times (a + a))$
  3. sestavte dva různé derivační stromy k jednomu řetězci

22 Chomského normální forma (CNF)

- **CNF** (zkratka z *Chomsky normal form*) je zjednodušený tvar CFG, který nám usnadní dokázat některá tvrzení (např. *pumping lemma* pro bezkontextové jazyky)
- do CNF lze převést každá CFG
- CFG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ je v Chomského normální formě, pokud jsou všechna její pravidla ve tvaru:
  1. $A \to BC$ (neterminál generuje dva neterminály)
  2. $A \to a$ (neterminál generuje pouze jeden terminál)
  3. $S \to \varepsilon$, pokud se S nevyskytuje na pravé straně jakéhokoliv pravidla (pouze počáteční neterminál může generovat generovat prázdný řetězec)
- mějme CFG $\mathcal{G}_1 = (N, \Sigma, P, S)$, kde $N = \{S, A, B, C, D, E, F\}$ a $\Sigma = \{a, b, c, d\}$:

$$
\begin{aligned}
S &\to ASA \mid Ca \mid \varepsilon \\
A &\to S \mid aB \mid Ca \\
B &\to acB \mid bE \\
C &\to acac \mid Da \mid \varepsilon \\
D &\to dSS \mid E \mid aa \\
E &\to cB \mid acE \\
F &\to bD \mid ED
\end{aligned}
$$

převedení $\mathcal{G}_1$ do CNF provedeme v následujících krocích (záleží i na jejich pořadí):

1. **odstraníme počáteční neterminál z pravé strany všech pravidel**
   - pokud se počáteční neterminál S vyskytuje na pravé straně nějakého pravidla, vytvoříme nový neterminál S' a přidáme nové pravidlo $S' \to S$
   - zvolíme S' jako nový počáteční neterminál $\mathcal{G}$

2. **odstraníme ε-pravidla**

   - odebereme libovolné pravidlo ve tvaru $A \to \varepsilon$, kde A není počáteční neterminál
   - dále pro každé pravidlo $B \to \alpha$ obsahující A na pravé straně:
     (a) přidáme do $\mathcal{G}$ nová pravidla ve tvaru $B \to \beta$, kde β je řetězce α, ve kterém každý výskyt A může být nahrazen ε (např. pro pravidlo $B \to \alpha A \beta A \gamma \in P$ přidáme $B \to \alpha\beta A\gamma \mid \alpha A \beta\gamma \mid \alpha\beta\gamma$)
     (b) pokud je pravidlo ve tvaru $B \to A$, pak přidáme nové pravidlo $B \to \varepsilon$, ale jen v případě, že jsme takové pravidlo již neodstranili (jinak by mohlo dojít k zacyklení)
   - tyto kroky opakujeme, dokud neodstraníme všechna ε-pravidla (kromě $S \to \varepsilon$, kde S je startovní neterminál)

3. **odstraníme jednoduchá pravidla**

   - pravidla ve tvaru $A \to B$, kde $B \in N$, nejsou v CNF povolena (můžeme vygenerovat vždy jen dva neterminály)
   - každé takové pravidlo $A \to B$ odstraníme z $\mathcal{G}$, a poté přidáme nové pravidla $A \to \alpha_1 \mid \ldots \mid \alpha_k$, kde $B \to \alpha_1 \mid \ldots \mid \alpha_k$ jsou všechna zbývající pravidla s B na levé straně, které jsme při tomto procesu již neodstranili (jinak by mohlo dojít k zacyklení)

4. **odstraníme neterminály, které nederivují terminální řetězec**

   - iterativně počítáme množinu neterminálů N_i, které generují terminální řetězec
   - na začátku položíme $N_0 = \emptyset$ a postupně konstruujeme další $N_i = N_{i-1} \cup \{A \mid A \to \alpha,\ \alpha \in (N_{i-1} \cup \Sigma)^*\}$, výpočet končí pokud $N_i = N_{i-1}$
   - nechť N_e je poslední vypočítaná množina N_i, pak z $\mathcal{G}$ odstraníme všechny neterminály z $N \setminus N_e$ a pravidla, v nichž se tyto symboly vyskytují

5. **odstraníme nedosažitelné symboly**

   - iterativně počítáme množinu symbolů $V_i \in \Sigma \cup N$, které lze vygenerovat z počátečního neterminálu
   - na začátku položíme $V_0 = \{S\}$ a postupně konstruujeme další $V_i = V_{i-1} \cup \{X \mid A \in V_{i-1} \wedge A \to \alpha X \beta \in P,$ pro nějaké $A \in N$ a $\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*\}$, výpočet končí pokud $V_i = V_{i-1}$
   - nechť V_e je poslední vypočítaná množina V_i, pak z $\mathcal{G}$ odstraníme všechny terminály i neterminály, které nejsou v V_e a pravidla, v nichž se tyto symboly vyskytují (formálně $N' = N \cap V_e, \Sigma' = \Sigma \cap V_e$ a $P' = P \cap (V_e \times V_e^*)$)

6. **nakonec převedeme pravidla do správného tvaru**

- pořád nám ještě zbývají pravidla, které generují kombinace terminálů a neterminálů, nebo více než dva symboly
- pro každý terminál $a \in \Sigma$ vytvoříme nový neterminál $\langle a \rangle$ a pravidlo $\langle a \rangle \to a$, které přidáme do $\mathcal{G}$ jen v případě, že přidáme jiné pravidlo generující $\langle a \rangle$
- každé pravidlo ve tvaru $A \to x_1 \dots x_k$, kde $k \geq 3$ a $x_1, \dots, x_k$ jsou buď terminály nebo neterminály, nahradíme novými pravidly:

  $$A \to \hat{x}_1 \langle x_2 \dots x_k \rangle,\ \langle x_2 \dots x_k \rangle \to \hat{x}_2 \langle x_3 \dots x_k \rangle,\ \dots,\ \langle x_{k-1} x_k \rangle \to \hat{x}_{k-1} \hat{x}_k$$

  kde $\langle x_2 \dots x_k \rangle, \dots, \langle x_{k-1} x_k \rangle$ jsou nové neterminály a $\hat{x}_i$ je $\langle a \rangle$, pokud $x_i = a$ (tedy x_i je nějaký terminál), jinak $\hat{x}_i$ je neterminál x_i
- každé pravidlo ve tvaru $A \to x_i x_j$, kde aspoň jeden z x_i, x_j je terminál, nahraď novým pravidlem $A \to \hat{x}_i \hat{x}_j$ ($\hat{x}_i$ je $\langle a \rangle$, pokud $x_i = a$, jinak x_i, analogicky $\hat{x}_j$)

23 Algoritmus CYK

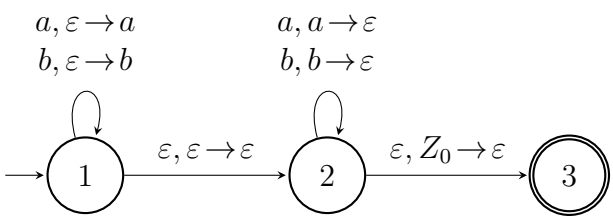
- pro zadanou CFG $G = (N, \Sigma, P, S)$ v CNF a řetězec w testuje zda platí $S \Rightarrow^* w$
- časová složitost $O(n^3)$, kde n je délka slova $w = w_1 \dots w_n$; počítáme tabulku velikosti $O(n^2)$, přičemž výpočet jedné buňky tabulky trvá $O(n)$
- **Průběh algoritmu:**
  1. vytvoříme trojúhelníkovou tabulku (viz níže) o šířce a výšce n a pod každý sloupec i napíšeme napíšeme terminál w_i
     poznámka: buňka v tabulce na indexu (i, j) odpovídá množině $X_{i,j}$, která obsahuje neterminály A, pro něž platí $A \Rightarrow^* w_i \dots w_j$
  2. inicializujeme spodní řádek tabulky: do každé množiny $X_{i,i}$ vložíme všechny neterminály A, pro které existuje v G pravidlo $A \to w_i$
  3. počítáme řadky od spodu tabulky: do $X_{i,j}$ vložíme neterminál A pokud existuje index k a pravidlo $A \to BC$ tak, že: $(i \leq k < j) \wedge B \in X_{i,k} \wedge C \in X_{k+1,j}$
     poznámka: pro každé $A \to BC$ postupně testujeme náležení B a C do dvojic množin $(X_{i,i}, X_{i+1,j}), (X_{i,i+1}, X_{i+2,j}), \dots, (X_{i,j-1}, X_{j,j})$
  4. pokud na konci výpočtu $X_{1,n}$ obsahuje startovní neterminál, pak platí $S \Rightarrow^* w$
- pomocí algoritmu CYK ověřte, že $S \Rightarrow^*$ *„time flies like an arrow“* v gramatice:

$$
\begin{aligned}
\text{S} &\to \text{NP VP} \\
\text{NP} &\to \text{DET NP} \mid \text{NP NP} \mid \textit{time} \mid \textit{flies} \mid \textit{arrow} \\
\text{VP} &\to \text{VP NP} \mid \text{VP PP} \mid \textit{flies} \mid \textit{like} \\
\text{PP} &\to \text{P NP} \\
\text{DET} &\to \textit{an} \\
\text{P} &\to \textit{like}
\end{aligned}
$$

$1,5$				
$1,4$	$2,5$			
$1,3$	$2,4$	$3,5$		
$1,2$	$2,3$	$3,4$	$4,5$	
$1,1$	$2,2$	$3,3$	$4,4$	$5,5$
time	*flies*	*like*	*an*	*arrow*

24 Zásobníkový automat (PDA)

- **PDA** (zkratka z *pushdown automaton*) je nedeterministický model podobný NFA, který má navíc přístup k potenciálně nekonečné paměti v podobě zásobníku
- motivace k PDA: chceme „zvýšit sílu“ NFA, aby rozponávaly bezkontextové jazyky
- **Definice:** PDA je reprezentován strukturou $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde:
  1. Q je konečná množina stavů
  2. Σ je vstupní abeceda
  3. Γ je zásobníková abeceda (platí $Z_0 \in \Gamma$)
  4. δ je přechodová funkce ve tvaru $\delta\colon Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$, která stavu, vstupnímu symbolu a symbolu na vrcholu zásobníku přiřadí množinu dvojic skládajících se ze stavu a řetězce zásobníkových symbolů
  5. q_0 je počáteční stav (platí pro něj $q_0 \in Q$)
  6. Z_0 je symbol, který je jako jediný v zásobníku na začátku výpočtu
  7. F je množina koncových/akceptujících stavů (platí $F \subseteq Q$)
- pro jednoduchost povolíme i přechody, které nejsou podmíněné vrcholem zásobníku, tedy například přechod $\delta(q, \varepsilon, \varepsilon) = \{(p, \varepsilon)\}$ nečte nic ze vstupu ani zásobníku
- stav výpočtu PDA popisuje **konfigurace**, což je trojice $\langle q, w, \alpha \rangle \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ obsahující aktuální stav, nezpracovanou část vstupního řetězce a stav zásobníku
- přechodová relace $X \vdash Y$ znamená, že z konfigurace X je dosažitelná konfigurace Y v jednom kroku ($\vdash^*$ značí rozšíření na libovolný počet kroků)
- jazyk PDA lze definovat dvěma způsoby:
  1. pomocí koncových stavů (podobně jako u NFA)
  $$L(P) = \{w \in \Sigma^* \mid \langle q_0, w, Z_0 \rangle \vdash^* \langle q_f, \varepsilon, \alpha \rangle, \text{ kde } q_f \in F \text{ a } \alpha \in \Gamma^*\}$$
  2. prázdným zásobníkem
  $$N(P) = \{w \in \Sigma^* \mid \langle q_0, w, Z_0 \rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \varepsilon \rangle, \text{ kde } q \in Q\}$$
- mějme PDA P_1 (popisky u přechodů jsou ve tvaru $\Sigma, \Gamma \to \Gamma^*$):



  1. je P_1 deterministický?
  2. jaké jsou jazyky $L(P_1)$ a $N(P_1)$?
  3. jaký může být stav zásobníku po přečtení *baaaa* ze vstupu?
  4. rozepište kroky $\langle 1, abba, Z_0 \rangle \vdash^* \langle 3, \varepsilon, \varepsilon \rangle$

25 Návrh PDA

$L_1 = \{a^i b^j c^j d^i \mid i, j \geq 0\}$

$L_2 = \{a^i b^j \mid 1 \leq j \leq i \leq 2j\}$

$L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ nebo } j = k\}$

$L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \neq \#_b(w)$, tedy počet a a b není stejný$\}$

26 Převod CFG na PDA

- PDA, stejně jako CFG, rozpoznávají třídu bezkontextových jazyků, a proto můžeme tyto modely mezi sebou převádět
- **Konstrukce:** mějme gramatiku $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$, pak PDA $A = (\{q\}, \Sigma, N \cup \Sigma, \delta, q, S, \emptyset)$ takový, že $L(G) = N(A)$, sestrojíme v těchto krocích:
  1. A má pouze jeden stav, který je zároveň počáteční (nemá koncové stavy)
  2. zásobníková abeceda A obsahuje všechny terminály a neterminály z $\mathcal{G}$
  3. počáteční zásobníkový symbol je počáteční neterminál S
  4. pro každé pravidlo $A \to \alpha$ přidáme přechod $(q, \alpha) \in \delta(q, \varepsilon, A)$
  5. dále pro každý terminál $a \in \Sigma$ přidáme přechod $\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$
- PDA A v této konstrukci simuluje nejlevější derivaci vstupního řetězce v $\mathcal{G}$ na svém zásobníku, přičemž v každém kroku nedeterministicky vybere jeden z přechodů:
  - přechody v bodu 4. expandují pravidla $\mathcal{G}$ na zásobník
  - přechody v bodu 5. srovnávají vygenerované terminály se vstupem
- mějme gramatiku $\mathcal{G}_1 = (\{E\}, \{a, +, \times, (,)\}, P, E\})$:

$$E \to E + E \mid E \times E \mid (E) \mid a$$

  1. převeďte $\mathcal{G}_1$ na PDA
  2. rozepište kroky $\langle q, (a \times a), E\rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \varepsilon\rangle$

27 Gramatiky typu 0 a 1

- jazyky, které generují gramatiky typu 0 a 1, jsou na rámec tohoto kurzu, více se o nich dozvíte v předmětu *Vyčíslitelnost a složitost*
- gramatika $\mathcal{G}$ je **kontextově závislá** (typ 1), pokud jsou všechna pravidla ve tvaru:
  1. $\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta$, kde $A \in N$, $\gamma \neq \varepsilon$ a $\alpha, \gamma, \beta \in (\Sigma \cup N)^*$ (levá strana pravidla může obsahovat společně s přepisovaným neterminálem A i další symboly, které podmiňují aplikování daného pravidla, ale samy nemohou být přepsány)
  2. $S \to \varepsilon$, pokud se S nevyskytuje na pravé straně jakéhokoliv pravidla
- ke každé nezkracující gramatice (všechny pravidla $\alpha \to \beta$ splňují $|\alpha| \leq |\beta|$, s výjimkou $S \to \varepsilon$) existuje ekvivalentní kontextově závislá gramatika (například pravidlo $aA \to Aa$ nahradíme sadou pravidel $X_a \to a$, $X_a A \to X_1 A$, $X_1 A \to X_1 X_2$, $X_1 X_2 \to A X_2$ a $A X_2 \to A X_a$, které zachovávají kontext)
- mějme mějme gramatiku $\mathcal{G}_1 = (\{S, A, B, C, W, Z\}, \{a, b, c\}, P, S\})$:

$$
\begin{aligned}
S &\to aBC \mid aSBC \\
CB &\to CZ \\
CZ &\to WZ \\
WZ &\to WC \\
WC &\to BC
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
aB &\to ab \\
bB &\to bb \\
bC &\to bc \\
cC &\to cc
\end{aligned}
$$

  1. jaký jazyk generuje gramatika $\mathcal{G}_1$?
  2. rozepište celou derivaci řetězce *aabbcc*

- pokud na pravidla neklademe žádné omezení, a tedy povolujeme libovolné pravidlo $\alpha \to \beta$ pro $\alpha, \beta \in (\Sigma \cup N)^*$, pak taková gramatika $\mathcal{G}$ je **bez omezenení** (typ 0)
- mějme mějme gramatiku $\mathcal{G}_2 = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, P, S\})$:

$$
\begin{aligned}
S &\to ABC \\
AB &\to aAD \mid bAE \mid \varepsilon \\
DC &\to BaC \\
EC &\to BbC \\
Da &\to aD
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
Db &\to bD \\
Ea &\to aE \\
Eb &\to bE \\
C &\to \varepsilon \\
aB &\to Ba \\
bB &\to Bb
\end{aligned}
$$

  1. jaký jazyk generuje gramatika $\mathcal{G}_2$?
  2. rozepište celou derivaci řetězce *baabaa*

28 Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

- **Pumping lemma pro CFL:** nechť L je bezkontextový jazyk, pak existuje číslo $n \in \mathbb{N}$ tak, že každý řetězec $s \in L$ délky aspoň n lze rozdělit na pět částí $s = uvxyz$, které splňují:

  1. $|vy| > 0$
  2. $|vxy| \leq n$
  3. $uv^ixy^iz \in L$ pro všechna $i \geq 0$

- **intuice:** L je bezkontextový, proto existuje PDA P, který jej rozpoznává; pokud máme dostatečně dlouhý řetězec $s \in L$, pak se v něm musí nějaký podřetězec v opakovat, přičemž P si na zásobník uloží výskyty tohoto podřetězce, a později je může srovnat s výskyty jiného podřetězce y (proto mezi počtem opakování v a y může být závislost)

- zásobník umožňuje pouze LIFO přístup, a proto P nemůže zároveň srovnávat výskyty více jak jedné dvojice; navíc řetězce ze zásobníku čteme v opačném pořadí, než byly uloženy (proto L_1 není CFL, přitom $\{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$ je CFL)

- dokažte, že následující jazyky nejsou bezkontextové:

  $L_1 = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$

  $L_2 = \{a^i\#a^j\#a^k \mid 0 < i < j < k\}$

29 Proč neplatí opačná implikace v pumping lemma?

- pumping lemma je tvrzení ve tvaru implikace: „pokud je jazyk regulární, případně bezkontextový, pak splňuje nějaké podmínky“
- lze ukázat, že opačná implikace neplatí (tedy neplatí tvrzení: „pokud platí podmínky v lemmatu, pak je jazyk regulární/bezkontextový“)
- pro jednoduchost uvažujme pumping lemma pro regulární jazyky, ale protipříklad můžeme najít i pro bezkontextové jazyky
- chceme najít jazyk, který splňuje pumping lemma, ale přitom není regulární
- mějme abecedu $\Sigma = \{a, b\}$, nějaký jazyk $L \subseteq \{b\}^*$ a jazyk $L_p = (\{a\}^+ \cdot L) \cup \{b\}^*$; dokažte následující tvrzení:

  1. L_p je regulární právě tehdy, když $(\{a\}^+ \cdot L)$ je regulární

  2. $(\{a\}^+ \cdot L)$ je regulární právě tehdy, když L je regulární

  3. pokud L není regulární, pak L_p také není regulární a zároveň splňuje podmínky pumping lemma

30 Domácí úkoly

1.1 mějme $L = \{ab, ba\}$, $M = \{aa, ab\}$ a $N = \{a, b\}$; vypište prvky jazyků:

(a) $L \cdot (M \cup N)$

(b) $L \cdot (M \cdot N)$

1.2 mějme abecedu $\Sigma = \{a, b\}$ a jazyky $A = \{a\}$ a $B = \{b\}$; popište obsah nekonečných jazyků:

(a) $B \cdot A^*$

(b) $A^* \cup B^+$

(c) $(A^* \cup B^*)^+$

poznámka: unární operace mají vyšší prioritu

1.3 zamyslete se, zda obecně platí vztahy a dokažte své tvrzení:

(a) $L \cdot (M \cup N) = (L \cdot M) \cup (L \cdot N)$

(b) $L \cdot (M \cdot N) = (L \cdot M) \cdot N$

2.1 mějme abecedu $\Sigma = \{a, b\}$ a dva jazyky $A = \{a\}$, $B = \{b\}$; navhrněte automaty rozponávající jazyky:

(a) $\Sigma^* \setminus (A^* \cdot B^*)$

(b) $A^+ \cdot B^+ \cdot A^*$

2.2 popište (slovně nebo pseudokódem) algoritmus, který o DFA A rozhodne, zda jeho jazyk $L(A)$ je konečná množina

2.3 zkuste si implementovat konečný deterministický automat s rozšířenou přechodovou funkcí ve vašem oblíbeném programovacím jazyce

3.1 popište průběh algoritmu, který z DFA odstraní nedosažitelné stavy

3.2 determinizujte NFA A_1 (bez ε-přechodů) ze Sekce 10

3.3 odstraňte ε-přechody z ε-NFA zadaného tabulkou a poté jej determinizujte:

δ_E	a	b	ε
$\rightarrow 1$	$\{2\}$	$\emptyset$	$\{2, 3\}$
2	$\{4\}$	$\{2, 3\}$	$\emptyset$
3	$\{5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
4	$\emptyset$	$\{5\}$	$\{5\}$
$5\star$	$\{5\}$	$\{3\}$	$\emptyset$

3.4 zamyslete se, jak by mohla vypadat obecná konstrukce DFA, který pro zadaný jazyk L rozponává jeho reverzní jazyk L^R

4.1 minimalizujte DFA zadaný tabulkou a výsledný automat nakreslete:

δ	a	b
$\rightarrow 1$	2	4
2	2	2
$3\star$	3	2
4	7	9
5	2	2
$6\star$	3	5
7	5	8
8	7	9
$9\star$	6	8

4.2 pomocí *pumping lemma* dokažte, že jazyk není regulární:

$$L = \{s \in \{(,)\}^* \mid s \text{ je správně uzávorkovaný výraz}\}$$

– správně uzávorkovaný je například ()() nebo ((())()), přičemž (() a)(nejsou

4.3 pomocí součinové konstrukce sestrojte DFA pro jazyk:

$$\{s \in \{a,b\}^* \mid s \text{ má lichý počet } a\} \cup \{s \in \{a,b\}^* \mid \text{každé } a \text{ je následováno alespoň dvěma } b\}$$

5.1 pro jazyky nad abecedou $\Sigma = \{0,1,2\}$ navrhněte RE:

(a) $\{s \mid s$ neobsahuje podřetězec $01\}$

(b) $\{s \mid s$ má lichý počet $0\}$

5.2 s pomocí libovolného regex editoru* si vyzkoušejte napsat *rozšířené*** RE pro:

(a) celá čísla a desetinná čísla:

✓ `10` ✗ `--10` (více než jedno znaménko)
✓ `-0.5` ✗ `0.` (za tečkou musí následovat číslo)
✓ `.5` ✗ `10.2ab` (nepovolené znaky)

(b) emailovou adresu (zde není nutné se držet přesné syntaxe adres, stačí rozpoznat uvedené příklady):

✓ `1234567890@example.com` ✗ `email@` (chybí doména)
✓ `____@example.com` ✗ `emailexample.com` (chybí @)
✓ `email@example.museum` ✗ `em@ail@example.com` (více jak jeden @)
✓ `email@example.co.jp` ✗ `my email@example.com` (znak mezery)

(c) IPv4 adresu:

✓ `172.15.255.255` ✗ `256.0.0.0` (256 je mimo rozsah)
✓ `172.32.0.0` ✗ `1.0.1..255.` (přebývající tečky)

∗ například `https://regex101.com/` podporuje několik standardů pro zápis RE
∗∗ běžně používané regulární výrazy toho umožňují více, než uvádí formální definice

5.3 pokud je L regulární jazyk, pak jazyk sufixů všech slov daného jazyka $Sfx(L) = \{z \mid \exists x \in L\colon x = yz\}$ je také regulární (a proto existuje DFA, který jej rozpoznává); zamyslete se, jak by mohla vypadat obecná konstrukce DFA rozpoznávající $Sfx(L)$ pro zadaný jazyk L

6.1 pro $\Sigma_1 = \{a, b, c, d, e\}$ a $\Sigma_2 = \{0, 1\}$ najděte homomorfismus $h\colon \Sigma_1 \to \Sigma_2^*$ takový, že pro všechna $w \in \Sigma_1^*$ platí $h^{-1}(h(w)) = \{w\}$

6.2 jaký je jazyk generovaný gramatikou $\mathcal{G}_1$ ze Sekce 18?

6.3 navrhněte regulární gramatiku pro jazyk $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid w$ neobsahuje podřetězec $abc\}$

6.4 najděte předpis, který pro zadané $n \in \mathbb{N}$ vytvoří NFA s n stavy, a jehož determinizace má 2^n dosažitelných stavů (takových předpisů automatů existuje více)

7.1 navrhněte gramatiku pro jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$, tedy jazyk slov, kde počet a a b není stejný

7.2 dokažte, že třída bezkontextových jazyků je uzavřená na operace regulárních výrazů: uzávěr *, sjednocení a zřetězní

7.3 mějme zadanou gramatiku $\mathcal{G} = (\{E, T, F\}, \{a, +, \times, (,)\}, P, E)$,

$$\begin{aligned} E &\to E + T \mid T \\ T &\to T \times F \mid F \\ F &\to (E) \mid a \end{aligned}$$

sestavte derivační stromy k řetězcům:

(a) $((a))$

(b) $a + a \times a$

(c) $(a + a) \times a$

8.1 nechť $\mathcal{G}$ je libovolná gramatika v CNF a $w \in L(\mathcal{G}) \setminus \{\varepsilon\}$ je neprázdný řetězec; jaká je minimální a maximální délka odvození řetězce w v $\mathcal{G}$ (počet provedených derivací)? pro své tvrzení uveďte důkaz

8.2 popište algoritmus, který pro CFG $\mathcal{G}$ rozhodne zda $L(\mathcal{G})$ je konečná množina

8.3 DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je *synchronizující*, pokud existuje $w \in L(A)$ a $q \in Q$ takové, že pro všechny $p \in Q$ platí $\delta(p, w) = q$. Můžeme o libovolném DFA rozhodnout, zda je synchronizující?

9.1 dokažte, že jazyky jsou bezkontextové:

$$L_1 = \{x_1\#x_2\#\ldots\#x_k \mid k \geq 2, x_i \in \{a, b\}^*, \text{ a } x_i = x_j^R \text{ pro nějaké } i \neq j\}$$
$$L_2 = \{x\#y \mid x, y \in \{a, b\}^+, |x| \leq |y| \wedge x \notin Pfx(y)\}$$

poznámka: symbol # je v tomto případě další znak abecedy – oddělovač

9.2 zamyslete se jak se změní množina jazyků rozpoznávaných pomocí PDA, pokud model upravíme tak, že:

(a) nový model má pouze konečný zásobník, tj. mějme danou konstantu k, pak nemůžeme provést přechod, po němž by obsah zásobníku byl větší než k

(b) nový model má k dispozici dva zásobníky, přičemž každý přechod v δ může manipulovat (zapisovat i číst) vždy jen s jedním zásobníkem

10.1 mějme gramatiku $\mathcal{G} = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a\}, P, S\})$:

$$\begin{aligned} S &\to ACaB \\ Ca &\to aaC \\ CB &\to DB \mid E \\ aD &\to Da \\ AD &\to AC \\ aE &\to Ea \\ AE &\to \varepsilon \end{aligned}$$

(a) rozhodněte jakého je gramatika typu a odpoveď zdůvodněte

(b) rozhodněte zda platí $S \Rightarrow^* aaaa$ (pokud ano, rozepište celou derivaci)

(c) jaký jazyk gramatika $\mathcal{G}$ generuje?

10.2 mějme jazyk $L = \{a^i b^j c^j d^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \geq 1\} \cup \{b^j c^k d^\ell \mid j, k, \ell \in \mathbb{N}\}$; dokažte tvrzení:

(a) L není bezkontextový

(b) L splňuje podmínky pumping lemma pro bezkontextové jazyky