



10. Relační tvar výrokových forem

verze z 2. prosince 2024

Jak víme, databázi modelujeme nějakou námi předem ostře vymezenou část reality. Předpokládejme, že je tato část v nějakém stavu a proměnné databáze mají hodnoty odpovídající jejím charakteristickým vlastnostem.

V následujícím textu si pro účely příkladů vymežíme část reality tvořenou námi vlastněnými filmy a přáteli. Tuto část reality modelujeme relačními proměnnými `liked` s charakteristickou vlastností „Osoba `person` má ráda film `movie`.“ a `action` s charakteristickou vlastností „Film `movie` je akční.“ Dále zmrazíme stav reality.

1 Výrokové formy nad schématem

Aby v pojmu n -tice nebyl důraz na symbol n budeme jej od teď nazývat novotvarem **entice**.

Připomeňme si, že při modelování databáze uvažujeme pouze výrokové formy $V(t)$ s jedinou proměnnou t , kde obor hodnot proměnné t je množina $\text{Tupl}(S)$ všech entic nad S pro vhodné relační schéma S . Říkáme, že V je **nad** S nebo také, že S je **relační schéma** výrokové formy V .

Například výroková forma

„Osoba $t(\text{person})$ má ráda film $t(\text{movie})$.“

je nad $\{\text{person}, \text{movie}\}$. Dosazením entice nad S za t ve výrokové formě V dostaneme výrok $V(t)$. Například dosazením entice

$$t_1 = \{\langle \text{person}, 'Anna' \rangle, \langle \text{movie}, 'Blue Velvet' \rangle\}$$

do výše uvedené formy dostaneme výrok

$$V(t_1) = \text{„Osoba 'Anna' má ráda film 'Blue Velvet'.“}$$

což je

„Anna má ráda film Blue Velvet.“

Výrokovou formu $V(t)$ nad S můžeme zjednodušit tak, že v ní nahradíme všechny výskyty $t(y)$ za y pro každé $y \in S$. Například

„Osoba $t(\text{person})$ má ráda film $t(\text{movie})$.“

se zjednoduší na

„Osoba person má ráda film movie .“

Výrokové formy mohou obsahovat kvantifikátory (obecný nebo existenční). Například

„Pro každé $t' \in \text{Tupl}(\{\text{movie}\})$ platí, že osoba $t(\text{person})$ má ráda film $t'(\text{movie})$.“

Pokud nemůže dojít k nedorozumění, můžeme místo $t' \in \text{Tupl}(\{y\})$ psát jen y a všechny výskyty $t'(y)$ nahradíme za y . Například předchozí formu zjednodušíme na

„Pro každé movie platí, že osoba person má ráda film movie .“

Množinu

$$\{t \in \text{Tupl}(S) \mid V(t)\}$$

označujeme $\|V\|$. Říkáme, že výroková forma V je **charakteristickou vlastností** množiny $\|V\|$. Přesněji charakteristická vlastnost množiny $\|V\|$ je „ $t \in \text{Tupl}(S)$ a $V(t)$ “. Množina $\|V\|$ je relací nad S , právě když je konečná.

2 Symbolický zápis výrokových forem

Charakteristickou vlastnost relační proměnné *relation* nad $\{y_1, \dots, y_n\}$ symbolicky zapíšeme jako

$$\text{relation}(y_1, \dots, y_n).$$

Například relační proměnná *liked* má charakteristickou vlastnost:

„Osoba person má ráda film movie .“

Výroková forma „Osoba person má ráda film movie .“ je též jako charakteristická vlastnost proměnné *liked*, proto ji symbolicky zapíšeme:

$$\text{liked}(\text{person}, \text{movie}).$$

K zápisu rovnosti atributů nebo rovnosti atributu a hodnoty z jeho domény použijeme symbol $=$. Například „*name* je *actor_name*“ zapíšeme jako

$$\text{name} = \text{actor_name}$$

a podobně „*name* je Anna“ zapíšeme jako

$$\text{name} = \text{'Anna'}.$$

Logické spojky negace, konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence budeme po řadě označovat symboly $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ a \leftrightarrow .

Například „Osoba `person` má ráda film `movie` a `person` je Anna.“ je symbolicky

$$\text{liked}(\text{person}, \text{movie}) \wedge (\text{person} = \text{'Anna'}).$$

Obecný a existenční kvantifikátor pro atribut y označíme po řadě symbolicky $(\forall y)$ a $(\exists y)$. Například

„Pro každé `movie` platí, že osoba `person` má ráda film `movie`.“

je symbolicky zapsáno jako

$$(\forall \text{movie}) \text{liked}(\text{person}, \text{movie}).$$

Schéma výrokové formy V si označíme $S(V)$. Schéma výrokové formy lze jednoduše odvodit z jejího symbolického zápisu za použití následujících pravidel.

1. $S(\textit{relation}(y_1, \dots, y_n)) = \{y_1, \dots, y_n\}$,
2. $S(y_1 = y_2) = \{y_1, y_2\}$,
3. $S(y = d) = \{y\}$,
4. $S(\neg V) = S(V)$,
5. $S(V_1 \wedge V_2) = S(V_1 \vee V_2) = S(V_1 \rightarrow V_2) = S(V_1 \leftrightarrow V_2) = S(V_1) \cup S(V_2)$,
6. $S((\forall y)V) = S((\exists y)V) = S(V) - \{y\}$,

kde *relation* je relační proměnná nad $\{y_1, \dots, y_n\}$, y, y_1, y_2 jsou atributy, $d \in D_y$ a V, V_1, V_2 jsou výrokové formy. Například $S((\forall \text{movie}) \text{liked}(\text{person}, \text{movie})) = \{\text{person}\}$.

3 Vztah výrokových forem a relačních operací

Mezi výrokovými formami a relačními operaci jsou následující vztahy.

1. Pro libovolné výrokové formy V_1 a V_2 platí

$$\|V_1 \wedge V_2\| = \|V_1\| \bowtie \|V_2\|.$$

2. Pokud $S(V_1)$ je disjunktní s $S(V_2)$, pak

$$\|V_1 \wedge V_2\| = \|V_1\| \times \|V_2\|.$$

3. Pokud $S(V_1) = S(V_2)$, pak

$$\|V_1 \wedge V_2\| = \|V_1\| \cap \|V_2\|.$$

4. Pokud $S(V_1) = S(V_2)$, pak

$$\|V_1 \wedge \neg V_2\| = \|V_1\| - \|V_2\|.$$

5. Pokud $S(V_1) = S(V_2)$, pak

$$\|V_1 \vee V_2\| = \|V_1\| \cup \|V_2\|.$$

6. Pokud $y_1, y_2 \in S(V)$, pak

$$\|V \wedge (y_1 = y_2)\| = \sigma_{y_1=y_2}(\|V\|).$$

7. Pokud $y \in S(V)$ a $d \in D_y$, pak

$$\|V \wedge (y = d)\| = \sigma_{y=d}(\|V\|).$$

8. Pokud $y_1 \in S(V)$ a $y_2 \notin S(V)$, pak

$$\|(\exists y_1)(V \wedge (y_1 = y_2))\| = \rho_{y_2 \leftarrow y_1}(\|V\|).$$

9. Pro atribut y máme

$$\|(\exists y)V\| = \pi_{S(V)-\{y\}}(\|V\|).$$

4 Relační výrazy

Relační výraz (**relační algebrý**) nad schématem je dán pomocí následujících dvou pravidel.

1. Každá relační proměnná nad S je relačním výrazem nad S .
2. Zápis aplikace relační operace na vhodné relační výrazy je relačním výrazem. Konkrétně:
 - (a) $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$, $E_1 - E_2$ jsou relační výrazy nad S , kde E_1 a E_2 jsou relační výrazy nad S ;
 - (b) $\sigma_\theta(E)$ je relační výraz nad S , kde E je relační výraz nad S a θ je podmínka nad S ;
 - (c) $\pi_{S'}(E)$ je relační výraz nad S' , kde E je relační výraz nad S a $S' \subseteq S$;
 - (d) $E_1 \bowtie E_2$ je relační výraz nad $S_1 \cup S_2$, kde E_1 je relační výraz nad S_1 a E_2 je relační výraz nad S_2 ;

- (e) $\rho_h(E)$ je relační výraz nad S' , kde E je relační výraz nad S a $h: S \rightarrow S'$ je přejmenování atributů.

Například $\pi_{\{\text{person}\}}(\text{liked})$ je relační výraz nad $\{\text{person}\}$ a $\sigma_{\text{person}='Anna'}(\text{liked})$ je relační výraz nad $\{\text{person}, \text{movie}\}$.

Vyhodnocení relačního výrazu probíhá tak, že vyhodnocením relační proměnné získáme hodnotu proměnné a vyhodnocením zápisu aplikace relační operace se nejprve vyhodnotí její argumenty, na které se následně aplikuje zapsaná operace. Hodnotu relačního výrazu E si označíme $\|E\|$.

Řekneme, že výroková forma V nad S je **charakteristickou vlastností** výrazu E nad S , jestliže hodnota výrazu E má charakteristickou vlastnost V .

5 Relační tvar výrokových forem

Relační tvar výrokových forem je definován pomocí následujících pravidel.

1. Každá výroková forma *relation*(y_1, \dots, y_n) je v relačním tvaru.
2. Pokud V je výroková forma v relačním tvaru a y je atribut, pak výroková forma $(\exists y)V$ je v základním tvaru.
3. Pokud V_1 a V_2 jsou výrokové formy v relačním tvaru, pak i výroková forma $V_1 \wedge V_2$ je v relačním tvaru.
4. Pokud V_1 a V_2 jsou výrokové formy v relačním tvaru takové, že schéma výrokové formy V_1 je rovno schématu výrokové formy V_2 , pak výrokové formy $V_1 \vee V_2$ a $V_1 \wedge \neg V_2$ jsou v relačním tvaru.
5. Pokud V je výroková forma v relačním tvaru a atributy y_1, y_2 náležejí do schématu výrokové formy V , pak $V \wedge (y_1 = y_2)$ je výroková forma v relačním tvaru.
6. Pokud V je výroková forma v relačním tvaru, atribut y náležejí do schématu výrokové formy V a d je hodnota z domény atributu y , pak $V \wedge (y = d)$ je výroková forma v relačním tvaru.
7. Pokud V je výroková forma v relačním tvaru a atributy y_1 náležejí schématu výrokové formy V , ale y_2 tam nenáležejí, pak $(\exists y_1)(V \wedge (y_1 = y_2))$ je výroková forma v relačním tvaru.

Výrokové formy v relačním tvaru obsahují pouze spojky \neg, \wedge, \vee a kvantifikátor \exists .

Například následující výrokové formy jsou v relačním tvaru.

1. $\text{liked}(\text{person}, \text{movie}) \wedge \text{action}(\text{movie})$
2. $(\exists \text{person})\text{liked}(\text{person}, \text{movie})$

3. $\text{liked}(\text{person}, \text{movie}) \wedge (\text{person} = \text{'Anna'})$
4. $(\text{liked}(\text{person}, \text{movie}) \wedge (\text{person} = \text{'Anna'})) \vee (\text{liked}(\text{person}, \text{movie}) \wedge (\text{person} = \text{'Bea'}))$
5. $(\exists \text{movie})(\text{action}(\text{movie}) \wedge (\text{movie} = \text{movie2}))$
6. $\text{action}(\text{movie}) \wedge \neg(\text{action}(\text{movie}) \wedge (\text{movie} = \text{'Die Hard'}))$

Řekneme, že výroková forma V je **ekvivalentní** s relačním výrazem E , pokud relace s charakteristickou vlastností V je rovna hodnotě relačního výrazu E ; symbolicky $\|E\| = \|V\|$. Úkolem je pro výrokovou formu V najít ekvivalentní relační výraz E . Na dnešní přednášce se omezíme pouze na výrokové formy v relačním tvaru.

Převod výrokových forem v relačním tvaru na ekvivalentní relační výraz provedeme následovně.

1. Výrokovou formu tvaru $\text{relation}(y_1, \dots, y_n)$ převedeme na relační výraz relation .
2. Výrokovou formu tvaru $(\exists y)V$ převedeme na relační výraz $\pi_{S(V)-\{y\}}(E)$, kde jsme V převedli na E .
3. Výrokovou formu tvaru $V_1 \wedge V_2$ převedeme na relační výraz $E_1 \bowtie E_2$, kde jsme V_1 převedli na E_1 a V_2 na E_2 .
4. Výrokovou formu tvaru $V_1 \vee V_2$ převedeme na relační výraz $E_1 \cup E_2$, kde jsme V_1 převedli na E_1 a V_2 na E_2 .
5. Výrokovou formu tvaru $V_1 \wedge \neg V_2$ převedeme na relační výraz $E_1 - E_2$, kde jsme V_1 převedli na E_1 a V_2 na E_2 .
6. Výrokovou formu tvaru $V \wedge (y_1 = y_2)$, kde $y_1, y_2 \in S(V)$ převedeme na $\sigma_{y_1=y_2}(E)$, kde V jsme převedli na E .
7. Výrokovou formu tvaru $V \wedge (y = d)$ převedeme na $\sigma_{y=d}(E)$, kde jsme převedli V na E .
8. Výrokovou formu tvaru $(\exists y_1)(V \wedge (y_1 = y_2))$, kde $y_1 \in S(V)$ ale $y_2 \notin S(V)$ převedeme na $\rho_{y_2 \leftarrow y_1}(E)$, kde V jsme převedli na E .

Například následující výrokové formy v normální formě převedeme na pod nimi uvedené relační výrazy relační algebry.

1. $\text{liked}(\text{person}, \text{movie}) \wedge \text{action}(\text{movie})$
 $\text{liked} \bowtie \text{action}$
2. $(\exists \text{person})\text{liked}(\text{person}, \text{movie})$
 $\pi_{\{\text{movie}\}}(\text{person})$

3. $\text{liked}(\text{person}, \text{movie}) \wedge (\text{person} = \text{'Anna'})$
 $\sigma_{\text{person}=\text{'Anna'}}(\text{liked})$
4. $(\text{liked}(\text{person}, \text{movie}) \wedge (\text{person} = \text{'Anna'})) \vee (\text{liked}(\text{person}, \text{movie}) \wedge (\text{person} = \text{'Bea'}))$
 $\sigma_{\text{person}=\text{'Anna'}}(\text{liked}) \cup \sigma_{\text{person}=\text{'Bea'}}(\text{liked})$
5. $(\exists \text{movie})(\text{action}(\text{movie}) \wedge (\text{movie} = \text{movie2}))$
 $\rho_{\text{movie2} \leftarrow \text{movie}}(\text{action})$
6. $\text{action}(\text{movie}) \wedge \neg(\text{action}(\text{movie}) \wedge (\text{movie} = \text{'Die Hard'}))$
 $\text{action} - \sigma_{\text{movie}=\text{'Die Hard'}}(\text{action})$

Relační výrazy relační algebry z předchozího výčtu můžeme přímočaře přepsat na následující relační výrazy v SQL.

1.

```
SELECT *
FROM ( TABLE liked )
NATURAL JOIN ( TABLE action )
```
2.

```
SELECT DISTINCT movie FROM person
```
3.

```
SELECT *
FROM liked
WHERE person = 'Anna'
```
4.

```
( SELECT *
FROM liked
WHERE person = 'Anna' )
UNION
( SELECT *
FROM liked
WHERE person = 'Bea' )
```
5.

```
SELECT movie AS movie2
FROM action
```
6.

```
( TABLE action )
EXCEPT
( SELECT *
FROM action
WHERE movie = 'Die Hard' )
```

nebo

```
SELECT *
FROM action
WHERE movie <> 'Die Hard'
```

Otázky a úkoly na cvičení

- V následujících příkladech vymezte část reality tvořenou vlastněnými filmy a režiséry, kteří je natočili, modelovanou proměnnými `director` s charakteristickou vlastností „Režisér `name` se narodil roku `born`.“, `movie` s charakteristickou vlastností „Film `title` byl vydán v roce `year`.“ a `movie_director` s charakteristickou vlastností „Režisér `name` natočil film `title`.“ Zapište symbolicky následující výrokové formy.
 - Řetězec `name` je jméno režiséra.
 - Režisér `name` natočil film v roce `year`.
 - Režisér `name` se nenarodil v roce `born`.
 - Režisér `name` se narodil v roce, ve kterém byl natočen film.
 - Režiséři `name1` a `name2` se narodili ve stejném roce.
 - Film `title` byl vydán v roce 2000 nebo 2001.
- Zapište srozumitelnou větou následující symbolicky zapsané výrokové formy a určete jejich schémata.
 - `movie_director(name, title)`
 - `movie_director(name, title) ∧ (title = 'The Matrix')`
 - `(∃name)(director(name, born))`
 - `director(name, born) ∧ movie_director(name, title)`
 - `(∃name)(movie_director(name, title) ∧ (name = 'Lana Wachowski'))`
 - `¬movie_director(name, title)`
- Rozhodněte, které z výrokových forem z prvního a druhého úkolu jsou v relačním tvaru.
- Výrokové formy v relačním tvaru z prvního a druhého úkolu převedte na ekvivalentní relační výrazy relační algebry.
- Relační výrazy z předchozího úkolu přepište do SQL.