KATEDRA
INFORMATIKY
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

JAN LAŠTOVIČKA
https://www.inf.upol.cz/lide/jan-lastovicka

1. Logika
Logické programování

poznámky k přednášce, verze z 22. října 2026

1 Čistá logika

Poslechněme si větu „na stole leží nůž“, kterou říká jeden člověk druhému. Významem věty je jistý soud, který tvrdí určitý stav věcí. Člověk, který větě naslouchá, může větě porozumět a tím uchopit její význam. Posluchač následně může ověřit platnost soudu tak, že zkontroluje, zda opravdu na stole leží nůž. Uvedená věta má význam nejen v této konkrétní situaci, ale i nespočtu jiných. Zaměříme-li se na větu samotnou, zjistíme, že má význam sama o sobě. Totiž význam této věty je právě jen to, že je zde jistý stůl a na něm leží jistý nůž. Význam můžeme od věty oddělit, existuje tedy nezávisle na ní. Významy jsou tedy podobně jako čísla ideální objekty, které můžeme zkoumat.

Jazykové útvary, které mají významy, budeme nazývat výrazy. Věta „na stole leží nůž“ má význam a je proto výrazem. Naproti tomu text „jedna, protože rovná se“ výrazem není, protože nemá žádný význam. Ne každý význam je významem nějakého výrazu. Například číslo nula je významem, ale před jeho objevem neexistoval výraz, jehož významem by byla nula.

Rozebereme-li význam výrazu „na stole leží nůž“, zjistíme, že se skládá z jiných významů: objektu stůl, objektu nůž a vztahu ležet na. Výraz, jehož význam je složený, většinou obsahuje podvýrazy, jejichž významy skládají jeho význam. V našem případě jsou to podvýrazy „stůl“, „nůž“ a „leží na“.

Předmětem významu rozumíme to, na co význam cílí. Například předmětem významu výrazu „$1+2$“ je číslo 3. Předmět se od významu obecně liší. Významem výrazu „$1+2$“ je součet čísel jedna a dva. Dva různé významy mohou mínit stejný předmět. Například výrazy „rovnostranný trojúhelník“ a „rovnoúhlý trojúhelník“ mají různé významy, ale týž předmět. Významy nemusí mít žádný předmět. Příkladem budiž význam výrazu „kulatý čtverec“.

Čistá logika je věda zkoumající zákony platné pro právě zpřítomněné ideální významy. Ukážeme si příklad jednoho logického zákona. Ke každému soudu jistě existuje jeho negace, která je opět soudem. Například význam výrazu „na stole neleží nůž“ je negací významu výrazu „na stole leží nůž“. Logický zákon určuje, že soud a jeho negace nemohou být současně pravdivé. Platnost základních logických zákonů není možné dokázat, protože při důkazu je potřebujeme používat. Jejich platnost je potřeba nahlédnout. K tomu si vystačíme s jediným příkladem. Na příkladu nože vidíme, že není možné, aby současně ležel a neležel na stole. Protože tato nemožnost je závislá pouze na tvaru soudů, konkrétně, že jeden je negací druhého, vyplývá z toho, že musí platit i pro jiné soudy téže formy.

Více se zájemce dozví v pozoruhodné knize *Logická zkoumání* od Edmunda Husserla z roku 1900.

2 Predikátová logika

Čísla $0, 1, 2, \ldots$ nazýváme **přirozená**. Množinu všech přirozených čísel označujeme symbolem $\mathbb{N}_0$. **Abeceda** jazyka predikátové logiky se skládá ze symbolů rozdělených do následujících skupin:

1. **proměnné**,

2. **funkční symboly**,

3. **relační symboly**,

4. **logické spojky** $\neg$ (negace) a $\rightarrow$ (implikace),

5. **obecný kvantifikátor** $\forall$,

6. **levá a pravá závorka**,

kde každému funkčnímu a relačnímu symbolu je přiřazeno přirozené číslo nazývané jeho **četnost**. Notace s/n značí, že s je funkční nebo relační symbol s četností n. Předpokládáme, že abeceda obsahuje spočetně mnoho proměnných. Funkční symboly s četností nula nazýváme **konstanty**.

Zavedeme konvenci udávající, aby jména proměnných začínala velkým písmenem ($X, Y, Parent, Number$) a jména funkčních a relačních symbolů začínala malým písmenem ($zero, succ, even$).

Množina **termů** $\mathcal{T}$ nad abecedou $\mathcal{A}$ je nejmenší množina, která splňuje následující:

1. každá proměnná z $\mathcal{A}$ je v $\mathcal{T}$;

2. jestliže f/n je funkční symbol z $\mathcal{A}$ a $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, pak $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$.

Pro konstantu c píšeme místo termu $c()$ jen c.

Pokud bychom v abecedě $\mathcal{A}$ měli funkční symboly $zero/0$ a $succ/1$, můžeme z nich poskládat termy $zero, succ(zero), succ(succ(zero)), \ldots$ nad abecedou $\mathcal{A}$, kterými můžeme reprezentovat přirozená čísla. Dokonce si přirozenými čísli $0, 1, 2, \ldots$ můžeme postupně tyto termy označit.

Nechť $\mathcal{T}$ je množina termů nad abecedou $\mathcal{A}$. Množina $\mathcal{F}$ **formulí** nad abecedou $\mathcal{A}$ je nejmenší množina, která splňuje následující:

1. jestliže r/n je relační symbol z $\mathcal{A}$ a $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, pak $r(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}$;

2. jestliže $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$, pak také $\neg\varphi, (\varphi \rightarrow \psi) \in \mathcal{F}$;

3. jestliže $\varphi \in \mathcal{F}$ a X je proměnná z $\mathcal{A}$, pak také $(\forall X)\varphi \in \mathcal{F}$.

Formule tvaru $r(t_1, \ldots, t_n)$ nazýváme **atomické formule** (nebo krátce **atomy**). Budeme používat běžná pravidla pro vynechávání závorek. Pro formule φ a ψ nad abecedou $\mathcal{A}$ zavádíme následující zkratky:

1. $(\varphi \wedge \psi)$ je zkratka za $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$,

2. $(\varphi \vee \psi)$ je zkratka za $\neg\varphi \rightarrow \psi$,

3. $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ je zkratka za $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$,

4. $(\exists X)\varphi$ je zkratka za $\neg(\forall X)\neg\varphi$.

Zavedli jsme postupně zkratky pro pravdu, konjunkci, disjunkci, ekvivalenci a existenční kvantifikátor. Také budeme používat zkratku $(\varphi \leftarrow \psi)$ za $(\psi \rightarrow \varphi)$.

Předpokládejme, že abeceda vždy obsahuje speciální relační symbol $r_{\blacksquare}$ s četností nula. Zkratky pro pravdu $\blacksquare$ a nepravdu $\square$ zavedeme následovně:

1. $\blacksquare$ je zkratka za $r_{\blacksquare}() \rightarrow r_{\blacksquare}()$;

2. $\square$ je zkratka za $\neg\blacksquare$.

Vezměme abecedu $\mathcal{A}$ s funkčními symboly $zero/0, succ/0$ a relačním symbolem $even/1$. Pokud m je term reprezentující přirozené číslo, pak atomická formule $even(n)$ zapisuje výrok „číslo n je sudé“. Formule $even(zero)$ (v naší notaci též $even(0)$) tvrdí, že nula je sudé číslo. Formule

$$(\forall N)(even(succ(succ(N))) \leftarrow even(N))$$

zapisuje tvrzení, které můžeme číst následovně: pro každé n platí, že následník následníka n je sudé číslo, kdykoli n je sudé číslo.

Logickým výrazem rozumíme term nebo formuli.

Déle předpokládáme, že je dána abeceda $\mathcal{A}$. Všechny termy a formule jsou nad abecedou $\mathcal{A}$. Množina **proměnných** $\mathrm{var}(E)$ logického výrazu E je definována následovně:

1. jestliže E je proměnná X, pak $\mathrm{var}(E) = \{X\}$;
2. jestliže E je term tvaru $f(t_1, \ldots, t_n)$, pak $\mathrm{var}(E) = \mathrm{var}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{var}(t_n)$;
3. jestliže E je atom tvaru $r(t_1, \ldots, t_n)$, pak $\mathrm{var}(E) = \mathrm{var}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{var}(t_n)$;
4. jestliže E je formule tvaru $\neg\varphi_1$ nebo $(\forall X)\varphi_1$, pak $\mathrm{var}(E) = \mathrm{var}(\varphi_1)$;
5. jestliže E je formule tvaru $\varphi_1 \to \varphi_2$, pak $\mathrm{var}(E) = \mathrm{var}(\varphi_1) \cup \mathrm{var}(\varphi_2)$.

Množina **proměnných s volným výskytem** $\mathrm{free}(E)$ logického výrazu E je definována následovně:

1. jestliže E je term, pak $\mathrm{free}(E) = \mathrm{var}(E)$;
2. jestliže E je atom tvaru $r(t_1, \ldots, t_n)$, pak $\mathrm{free}(E) = \mathrm{var}(\varphi)$;
3. jestliže E je formule tvaru $\neg\varphi_1$, pak $\mathrm{free}(E) = \mathrm{free}(\varphi_1)$;
4. jestliže E je formule tvaru $\varphi_1 \to \varphi_2$, pak $\mathrm{free}(E) = \mathrm{free}(\varphi_1) \cup \mathrm{free}(\varphi_2)$;
5. jestliže E je formule tvaru $(\forall X)\varphi_1$, pak $\mathrm{free}(E) = \mathrm{free}(\varphi_1) \setminus \{X\}$.

Term nebo formuli nazýváme **základní**, jestliže neobsahuje žádné proměnné. Formule se nazývá **uzavřená**, jestliže nemá žádnou proměnnou s volným výskytem. Základní term také nazýváme **uzavřený term**. Například formule $(\forall X)number(X)$ je uzavřená, ale není bez proměnných.

Nechť φ je formule a $X_1, \ldots, X_n$ jsou její všechny volné proměnné. Pak uzavřené formule $(\forall X_1) \cdots (\forall X_n)\varphi$ a $(\exists X_1) \cdots (\exists X_n)\varphi$ nazýváme postupně **obecný** a **existenční uzávěr** formule φ a značíme je $\forall\varphi$ a $\exists\varphi$.

Interpretace $\mathcal{I}$ abecedy $\mathcal{A}$ je neprázdná množina D a zobrazení, které přiřazuje

1. každému funkčnímu symbolu f z $\mathcal{A}$ s četností n funkci $f^{\mathcal{I}} \colon D^n \to D$,
2. každému relačnímu symbolu r z $\mathcal{A}$ s četností n relaci $r^{\mathcal{I}} \subseteq D^n$.

Množina D se nazývá **doména** interpretace a značíme ji $|\mathcal{I}|$. Kartézská mocnina D^0 je rovna $\{()\}$, kde $()$ je nulatice. Interpretací konstanty c je tedy funkce $c^{\mathcal{I}} \colon \{()\} \to D$, což je singleton $c^{\mathcal{I}} = \{((), d)\}$ pro nějaké $d \in D$. Můžeme tedy $c^{\mathcal{I}}$ rovnou ztotožnit s d a tím získat $c^{\mathcal{I}} = d$. První kartézská mocnina D^1 je rovna $\{(d) \mid d \in D\}$. Jednatice (d) budeme ztotožňovat s d. Tak bude D^1 rovno přímo D. Interpretace relačního symbolu s četností jedna je tedy podmnožina domény.

Uvažujme abecedu $\mathcal{A}$ s funkčními symboly $zero/0, succ/1$ a relačním symbolem $even/2$. Přirozeně se nabízí interpretace $\mathcal{I}_0$ abecedy $\mathcal{A}$ s doménou $\mathbb{N}$, kde jsou symboly interpretovány následovně:

1. $zero^{\mathcal{I}_0} = 0$;
2. $succ^{\mathcal{I}_0}(n) = n + 1$, pro $n \in \mathbb{N}_0$;
3. $even^{\mathcal{I}_0} = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \text{ je sudé}\}$.

Můžeme ale uvažovat i interpretaci $\mathcal{I}_1$, která bude totožná s $\mathcal{I}_0$ až na to, že relační symbol $even$ interpretujeme jako množinu lichých čísel; symbolicky $even^{\mathcal{I}_1} = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \text{ je liché}\}$. Podobně máme i interpretaci $\mathcal{I}_2$, která je také totožná s $\mathcal{I}_0$, ale $even$ interpretujeme jako množinu všech přirozených čísel (symbolicky $even^{\mathcal{I}_2} = \mathbb{N}_0$) nebo interpretaci $\mathcal{I}_3$, kde je sudé jen číslo nula.

Další přirozená interpretace $\mathcal{I}_4$ abecedy $\mathcal{A}$ má doménu $|\mathcal{I}_4| = \{\epsilon, a, aa, aaa, \ldots\}$ (řetězce nad abecedou $\{a\}$) a symboly interpretujeme následovně:

1. $zero^{\mathcal{I}_4} = \epsilon$;
2. $succ^{\mathcal{I}_4}(s) = sa$, pro řetězec $s \in |\mathcal{I}_4|$ (sa značí přidání a nakonec řetězce s);
3. $even^{\mathcal{I}_4} = \{s \in D \mid s \text{ je řetězec sudé délky}\}$.

Pozoruhodná je také interpretace $\mathcal{I}_5$, kde doménou jsou všechny termy bez proměnných $|\mathcal{I}_5| = \{zero, succ(zero), succ(succ(zero)), \ldots\}$ a symboly interpretujeme následovně:

1. $zero^{\mathcal{I}_5} = zero$;
2. $succ^{\mathcal{I}_5}(t) = succ(t)$, pro term $t \in |\mathcal{I}_5|$;
3. $even^{\mathcal{I}_5} = \{zero, succ(succ(zero)), succ(succ(succ(succ(zero)))), \ldots\}$.

Hraničním případem jsou interpretace, kde doména je singleton.

Je-li dána interpretace abecedy, pak zobrazení, které proměnným abecedy přiřazuje prvky domény interpretace se nazývá **ohodnocení**. Výrazem $v[X \mapsto e]$ označujeme ohodnocení, které je totožné s ohodnocením v až na to, že proměnnou X zobrazuje na e.

Nechť $\mathcal{I}$ je interpretace, v ohodnocení a t term. Pak **význam termu** $v_{\mathcal{I}}(t)$ je prvek domény $\mathcal{I}$ určený následovně:

1. jestliže t je proměnná X, pak $v_{\mathcal{I}}(t) = v(X)$,
2. jestliže t je tvaru $f(t_1, \ldots, t_n)$, pak $v_{\mathcal{I}}(t) = f^{\mathcal{I}}(v_{\mathcal{I}}(t_1), \ldots, v_{\mathcal{I}}(t_n))$.

Například pro výše uvedenou interpretaci $\mathcal{I}_0$ je $v_{\mathcal{I}_0}(succ(succ(zero))) = 2$ pro libovolné ohodnocení v a $v_{\mathcal{I}_0}(succ(X)) = 3$ pro ohodnocení v, kde $v(X) = 2$. V interpretaci $\mathcal{I}_3$ je $v_{\mathcal{I}_3}(succ(succ(zero))) = aa$ pro libovolné ohodnocení v.

Významem formule je pravdivostní hodnota. Tvrzení „formule φ je pravdivá vzhledem k $\mathcal{I}$ a v“ zapíšeme symbolicky jako $\mathcal{I} \vDash_v \varphi$; podobně $\mathcal{I} \nvDash_v \varphi$ symbolizuje, že φ je nepravdivá vzhledem k $\mathcal{I}$ a v.

Nechť $\mathcal{I}$ je interpretace a v ohodnocení. Pak **význam** libovolné **formule** je dán následujícími pravidly:

1. $\mathcal{I} \vDash_v r(t_1, \ldots, r_n)$ právě tehdy, když $(v_{\mathcal{I}}(t_1), \ldots, v_{\mathcal{I}}(t_n)) \in r^{\mathcal{I}}$;
2. $\mathcal{I} \vDash_v \neg\varphi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \nvDash_v \varphi$;
3. $\mathcal{I} \vDash_v \varphi \to \psi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \vDash_v \psi$, kdykoli $\mathcal{I} \vDash_v \varphi$;
4. $\mathcal{I} \vDash_v (\forall X)\varphi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \vDash_{v[X \mapsto d]} \varphi$ pro každé d z domény $\mathcal{I}$.

Tvrzení 1. *Nechť $\mathcal{I}$ je interpretace a v ohodnocení. Pak platí následující pro libovolné formule φ a ψ:*

1. $\mathcal{I} \vDash_v \blacksquare$;
2. $\mathcal{I} \nvDash_v \square$;
3. $\mathcal{I} \vDash_v \varphi \wedge \psi$ *právě tehdy, když* $\mathcal{I} \vDash_v \varphi$ *a* $\mathcal{I} \vDash_v \psi$;
4. $\mathcal{I} \vDash_v \varphi \vee \psi$ *právě tehdy, když* $\mathcal{I} \vDash_v \varphi$ *nebo* $\mathcal{I} \vDash_v \psi$;
5. $\mathcal{I} \vDash_v \varphi \leftrightarrow \psi$ *právě tehdy, když* $\mathcal{I} \vDash_v \varphi \to \psi$ *a* $\mathcal{I} \vDash_v \psi \to \varphi$;
6. $\mathcal{I} \vDash_v (\exists X)\varphi$ *právě tehdy, když* $\mathcal{I} \vDash_{v[X \mapsto d]} \varphi$ *pro některé d z domény $\mathcal{I}$.*

Důkaz.
1. Dokážeme $\mathcal{I} \vDash_v \blacksquare$. Symbol $\blacksquare$ je zkratka za $r_{\blacksquare}() \to r_{\blacksquare}()$. Proto $\mathcal{I} \vDash_v \blacksquare$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \vDash_v r_{\blacksquare}() \to r_{\blacksquare}()$ právě tehdy, když ($\mathcal{I} \vDash_v r_{\blacksquare}()$, kdykoli $\mathcal{I} \vDash_v r_{\blacksquare}()$) právě tehdy, když ($() \in r^{\mathcal{I}}$, kdykoli $() \in r^{\mathcal{I}}$), což je zřejmě pravda.
2. Protože $\square$ je zkratka za $\neg\blacksquare$, stačí ukázat, že $\mathcal{I} \nvDash_v \neg\blacksquare$, což platí, právě když $\mathcal{I} \vDash_v \square$ a to je pravda.

3. $\mathcal{I} \models_v \varphi \wedge \psi$, právě když $\mathcal{I} \models_v \neg(\varphi \to \neg\psi)$, právě když $\mathcal{I} \not\models_v \varphi \to \neg\psi$, právě když neplatí ($\mathcal{I} \models_v \neg\psi$, kdykoli $\mathcal{I} \models_v \varphi$), právě když neplatí ($\mathcal{I} \not\models_v \psi$, kdykoli $\mathcal{I} \models_v \varphi$), právě když $\mathcal{I} \models_v \psi$ a $\mathcal{I} \models_v \varphi$.

4. $\mathcal{I} \models_v \varphi \vee \psi$, právě když $\mathcal{I} \models_v \neg\varphi \to \psi$, právě když $\mathcal{I} \models_v \psi$, kdykoli $\mathcal{I} \not\models_v \varphi$, právě když $\mathcal{I} \models_v \psi$ nebo $\mathcal{I} \models_v \varphi$.

5. Plyne přímo z druhého bodu.

6. $\mathcal{I} \models_v (\exists X)\varphi$, právě když $\mathcal{I} \models_v \neg(\forall X)\neg\varphi$, právě když $\mathcal{I} \not\models_v (\forall X)\neg\varphi$, právě když neplatí, že $\mathcal{I} \not\models_{v[X\mapsto d]} \varphi$ pro každé d z domény $\mathcal{I}$, právě když $\mathcal{I} \models_{v[X\mapsto d]} \varphi$ pro nějaké d z domény $\mathcal{I}$.

□

Rozebereme význam formule $(\forall N)(even(succ(succ(N))) \leftarrow even(N))$. Vezměme libovolnou interpretaci $\mathcal{I}$ a ohodnocení v. Dostáváme $\mathcal{I} \models_v (\forall N)(even(succ(succ(N))) \leftarrow even(N))$, právě když $\mathcal{I} \models_{v[N\mapsto d]} even(succ(succ(N))) \leftarrow even(N)$ pro každé $d \in |\mathcal{I}|$, právě když ($\mathcal{I} \models_{v[N\mapsto d]} even(succ(succ(N)))$, kdykoli $\mathcal{I} \models_{v[N\mapsto d]} even(N)$) pro každé $d \in |\mathcal{I}|$, právě když ($succ^{\mathcal{I}}(succ^{\mathcal{I}}(d)) \in even^{\mathcal{I}}$, kdykoli $d \in even^{\mathcal{I}}$) pro každé $d \in |\mathcal{I}|$.

U uzavřených formulí je jejich pravdivostní hodnota nezávislá na zvoleném ohodnocení, proto můžeme definovat, že uzavřená formule φ je **pravdivá v interpretaci** $\mathcal{I}$ (symbolicky $\mathcal{I} \models \varphi$), jestliže je φ pravdivá vzhledem k $\mathcal{I}$ a libovolnému ohodnocení.

Například formule $even(succ(succ(zero)))$ je pravdivá ve výše uvedené interpretaci $\mathcal{I}_0$, ale není pravdivá v interpretaci $\mathcal{I}_1$. Formule

$$(\forall N)(even(succ(succ(N))) \leftarrow even(N))$$

je pravdivá v interpretacích $\mathcal{I}_0$ a $\mathcal{I}_1$, ale není pravdivá v interpretaci $\mathcal{I}_2$.

Teorií nazýváme libovolnou množinu uzavřených formulí. Například

$$T_0 = \{even(zero), (\forall N)(even(succ(succ(N))) \leftarrow even(N))\}$$

je teorie.

Řekneme, že interpretace $\mathcal{I}$ je **modelem** teorie T, jestliže je každá formule z T pravdivá v $\mathcal{I}$. Například interpretace $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_4$ jsou modelem teorie T_0, ale interpretace $\mathcal{I}_1$ ani $\mathcal{I}_3$ modelem teorie T_0 nejsou.

Řekneme, že uzavřená formule φ **vyplývá** z teorie T, symbolicky $T \models \varphi$, jestliže je φ pravdivá v každém modelu T. Například $T_0 \models even(succ(succ(zero)))$. Abychom to ukázali, tak vezměme libovolný model $\mathcal{I}$ interpretace T_0. Chceme ukázat, že $\mathcal{I} \models even(succ(succ(zero)))$, což znamená prokázat, že $succ^{\mathcal{I}}(succ^{\mathcal{I}}(zero^{\mathcal{I}})) \in even^{\mathcal{I}}$. Protože $even(zero) \in T_0$, je $zero^{\mathcal{I}} \in even^{\mathcal{I}}$. Vezměme formuli $\varphi = (\forall N)(even(succ(succ(N))) \leftarrow even(N)) \in T$. Protože $\mathcal{I} \models \varphi$, z pravidel významu formule dostáváme, že $succ^{\mathcal{I}}(succ^{\mathcal{I}}(d)) \in even^{\mathcal{I}}$, kdykoli $d \in even^{\mathcal{I}}$ pro libovolné d z domény $\mathcal{I}$. Protože $zero^{\mathcal{I}} \in even^{\mathcal{I}}$, je i $succ^{\mathcal{I}}(succ^{\mathcal{I}}(zero^{\mathcal{I}})) \in even^{\mathcal{I}}$.

Ukážeme, že $T_0 \not\models even(succ(zero))$. Musíme najít jediný model T_0, kde $even(succ(zero))$ je nepravdivé. Stačí vzít interpretaci $\mathcal{I}_0$. Zde je totiž $succ^{\mathcal{I}_0}(zero^{\mathcal{I}_0})$ rovno jedné a číslo jedna není v množině $even^{\mathcal{I}_0}$ všech suchých čísel.

Obecně platí, že $T_0 \models even(n)$, právě když je n sudé číslo. Dokážeme si to. Připomeňme si, že čísla kódujeme termy, tedy n ve formuli $even(n)$ je term $succ^n(zero)$, kde $succ^n$ značí n-násobnou aplikaci funkčního symbolu $succ$. Nechť je nejprve n sudé číslo. Vezměme model $\mathcal{I}$ teorie T_0 a ukažme, že $\mathcal{I} \models even(n)$. Stačí tedy ukázat, že $(succ^{\mathcal{I}})^n(zero^{\mathcal{I}}) \in even^{\mathcal{I}}$, kde $(succ^{\mathcal{I}})^n$ značím n-násobnou aplikaci funkce $succ^{\mathcal{I}}$. Protože $\mathcal{I}$ je model teorie $\mathcal{T}_0$, platí, že

1. $zero^{\mathcal{I}} \in even^{\mathcal{I}}$,

2. $succ^{\mathcal{I}}(succ^{\mathcal{I}}(d)) \in even^{\mathcal{I}}$, kdykoli $d \in even^{\mathcal{I}}$ pro libovolné $d \in |\mathcal{I}|$.

Indukcí dokážeme, že pro každé přirozené číslo n platí, že $(succ^{\mathcal{I}})^m(zero^{\mathcal{I}}) \in even^{\mathcal{I}}$ pro každé sudé $m \leq n$. Pro $n = 0$ tvrzení platí triviálně, protože $zero^{\mathcal{I}} \in even^I$. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro nějaké přirozené číslo n. Dokážeme, že platí i pro $n+1$. Pokud by n bylo sudé, je $n+1$ liché a nemáme co dokazovat. Nechť je tedy n liché, pak je $n+1$ sudé. Musíme tedy ukázat, že $(succ^{\mathcal{I}})^{n+1}(zero^{\mathcal{I}}) \in even^{\mathcal{I}}$. Jenže $n-1$ je také sudé a z indukčního předpokladu víme, že $(succ^{\mathcal{I}})^{n-1}(zero^{\mathcal{I}}) \in even^{\mathcal{I}}$. Proto i $succ^{\mathcal{I}}(succ^I((succ^{\mathcal{I}})^{n-1}(zero^{\mathcal{I}}))) = (succ^{\mathcal{I}})^{n+1}(zero^{\mathcal{I}}) \in even^{\mathcal{I}}$. Tím je ukončen důkaz pomocí indukce. Z dokázaného tvrzení již přímo plyne, že $(succ^{\mathcal{I}})^n(zero^{\mathcal{I}}) \in even^{\mathcal{I}}$ pro každé sudé přirozené číslo n.

Nechť je nyní n liché. Výše uvedená interpretace $\mathcal{I}_0$ je modelem teorie T_0. Ukážeme, že $\mathcal{I}_0 \not\models succ^n(zero)$. Pro libovolné ohodnocení v je $v_{\mathcal{I}_0}((succ^{\mathcal{I}_0})^n(zero^{\mathcal{I}_0})\cdots)) = n$, ale n je liché a proto $n \notin even^{\mathcal{I}_0}$.

Definujte postupně teorie tak, aby platilo následující.

1. $T \vDash odd(n)$ právě tehdy, když je n liché číslo.
2. $T \vDash le(m, n)$ právě tehdy, když je číslo m menší nebo rovno číslu n.
3. $T \vDash leq(m, n)$ právě tehdy, když je číslo m menší nebo rovno číslu n.
4. $T \vDash double(m, n)$ právě tehdy, když je číslo n dvojnásobkem čísla m.
5. $T \vDash plus(m, n, k)$ právě tehdy, když je součet čísel m a n roven číslu k.
6. $T \vDash mult(m, n, k)$ právě tehdy, když je součin čísel m a n roven číslu k.
7. $T \vDash square(m)$ právě tehdy, když je m čtverec (druhá mocnina nějakého čísla).