KATEDRA
INFORMATIKY
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

JAN LAŠTOVIČKA
https://www.inf.upol.cz/lide/jan-lastovicka

LOGICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

2. Herbrandovy modely

poznámky k přednášce, verze z 7. listopadu 2026

Formule φ a ψ nazveme **ekvivalentní** (označení $\varphi \equiv \psi$), jestliže

$$\mathcal{I} \vDash_v \varphi \text{ právě tehdy, když } \mathcal{I} \vDash_v \psi$$

pro každou interpretaci $\mathcal{I}$ a ohodnocení v.

Tvrzení 1. *Nechť φ a ψ jsou formule a X proměnná. Pak platí*

$$\begin{aligned}
\neg\neg\varphi &\equiv \varphi,\\
\neg(\varphi \vee \psi) &\equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi,\\
\neg(\varphi \wedge \psi) &\equiv \neg\varphi \vee \neg\psi,\\
\neg(\forall X)\varphi &\equiv (\exists X)\neg\varphi,\\
\neg(\exists X)\varphi &\equiv (\forall X)\neg\varphi.
\end{aligned}$$

Důkaz. Dokážeme jednotlivé ekvivalence.

1. Pro libovolnou interpretaci $\mathcal{I}$ a ohodnocení v máme $\mathcal{I} \vDash_v \neg\neg\varphi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \nvDash_v \neg\varphi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \vDash_v \varphi$;
2. $\neg(\varphi \vee \psi) = \neg(\neg\varphi \to \psi) \equiv \neg(\neg\varphi \to \neg\neg\psi) = \neg\varphi \wedge \neg\psi$;
3. $\neg(\varphi \wedge \psi) = \neg\neg(\varphi \to \neg\psi) = \varphi \to \neg\psi \equiv \neg\neg\varphi \to \neg\psi = \neg\varphi \vee \neg\psi$;
4. $\neg(\forall X)\varphi \equiv \neg(\forall X)\neg\neg\varphi = (\exists X)\neg\varphi$;
5. $\neg(\exists X)\varphi = \neg\neg(\forall X)\neg\varphi \equiv (\forall X)\neg\varphi$.

□

Klauzule je formule $\forall(L_1 \vee \cdots \vee L_n)$, kde každé L_i je buď atomická formule (**pozitivní literál**) nebo negace atomické formule (**negativní literál**). Pro $n = 0$ je klauzule rovna $\square$. Formuli $L_1 \vee \cdots \vee L_n$ nazýváme **jádro** klauzule. **Hornovská klauzule** je klauzule, která obsahuje nejvýše jeden pozitivní literál. **Definitní klauzule** C je hornovská klauzule s právě jedním pozitivním literálem. Tedy je to formule tvaru:

$$\forall(A_0 \vee \neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n)$$

Ekvivalentně ji můžeme vyjádřit jako:

$$\forall(A_0 \leftarrow (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$$

Budeme ji také zapisovat výrazem:

$$A_0 \leftarrow A_1, \ldots, A_n$$

Atom A_0 se nazývá **hlava** definitní klauzule C a značí se head(C); konjunkce $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ se nazývá **tělo** definitní klauzule C a značí se body(C). Pokud $n > 0$, pak definitní klauzuli nazýváme **pravidlo**, jinak **fakt**. Jestliže $n = 0$, pak se šipka vynechává a píšeme jen A_0.

Definitní program je konečná množina definitních klauzulí. Definitní program zapisujeme posloupností jeho prvků, kde za každým prvkem prvek uvedeme tečku. Každou definitní klauzuli většinou píšeme na samostatný řádek. Například:

$$\begin{aligned} &even(zero).\\ &even(succ(succ(N))) \leftarrow even(N)). \end{aligned}$$

zapisuje definitní program $P_1 = \{even(zero), (\forall N)(even(succ(succ(N))) \leftarrow even(N))\}$. Abecedou **indukovanou** definitním programem P rozumíme nejmenší abecedu $\mathcal{A}$, takovou, že každá definitní klauzule je nad abecedou $\mathcal{A}$. Například definitní program P_1 indukuje abecedu s dvěma funkčními symboly $zero/0, succ/1$ a jedním relačním symbolem $even/1$.

Tvrzení 2. *Nechť P je definitní program, $\mathcal{A}$ je jeho indukovaná abeceda a $\mathcal{I}$ je interpretace abecedy $\mathcal{A}$. Jestliže $r^{\mathcal{I}} = |\mathcal{I}|^n$ pro každý relační symbol r/n abecedy $\mathcal{A}$, pak $\mathcal{I}$ je modelem P.*

Důkaz. Nechť v je ohodnocení a $\forall(A_0 \leftarrow (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)) \in P$. Musíme ukázat, že $\mathcal{I} \vDash_v A_0 \leftarrow (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$. Stačí ověřit, že $\mathcal{I} \vDash_v A_0$. Nechť A_0 je tvaru $r(t_1, \ldots, t_n)$. Pak máme $\mathcal{I} \vDash_v A_0$ právě tehdy, když $(v_{\mathcal{I}}(t_1), \ldots, v_{\mathcal{I}}(t_n)) \in r^{\mathcal{I}} = |\mathcal{I}|^n$, což je evidentní pravda. □

Z předchozího tvrzení plyne, že každý definitní program má model.

Definitní cíl je hornovská klauzule bez pozitivního literálu. Tedy se jedná o formuli tvaru:

$$\forall(\neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n)$$

Atomické formule A_i nezýváme **podcíli**. Definitní cíl můžeme převést do tvaru:

$$\forall(\square \leftarrow (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n))$$

Definitní cíl běžně budeme zapisovat výrazem:

$$\leftarrow A_1, \ldots, A_n$$

Jestliže $n = 0$, pak píšeme $\square$ a definitní cíl nazýváme **prázdným cílem**.

V dalším snažení nás bude zajímat otázka, jak výpočtem rozhodnout, zda z definitního programu P vyplývá negace definitního cíle G; symbolicky $P \vDash \neg G$. Negací definitního cíle $\leftarrow A_1, \ldots, A_n$ obdržíme formuli $\neg\forall\neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$, která je ekvivalentní formuli $\exists(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$. Například negace definitního cíle $\leftarrow even(succ(X))$ je ekvivalentní formuli $(\exists X)even(succ(X))$. Konkrétně nás například může zajímat zda $P_1 \vDash (\exists X)even(succ(X))$, což bychom přečetli jako otázku, zda existuje sudé číslo větší nebo rovno jedné. Otázku, zda z definitního programu P vyplývá negace definitního cíle G můžeme podle následujícího tvrzení ekvivalentně vyjádřit jako otázku, zda $P \cup \{G\}$ nemá žádný model.

Tvrzení 3. *Uzavřená formule φ vyplývá z teorie T právě tehdy, když teorie $T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $T \vDash \varphi$. Nechť $\mathcal{I}$ je modelem teorie $T \cup \{\neg\varphi\}$. Pak formule φ je v $\mathcal{I}$ nepravdivá. Interpretace $\mathcal{I}$ je jistě i modelem teorie T a protože z ní plyne φ, musí být φ v $\mathcal{I}$ pravdivá. Dostáváme spor.

Nyní předpokládejme, že $T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model. Nechť $\mathcal{I}$ je modelem teorie T. Kdyby φ bylo v $\mathcal{I}$ nepravdivé, bylo by $\neg\varphi$ v $\mathcal{I}$ pravdivé a $\mathcal{I}$ by bylo modelem teorie $T \cup \{\neg\varphi\}$, což je opět spor. □

Nechť $\mathcal{A}$ je abeceda obsahující aspoň jednu konstantu. Pak množinu $U_\mathcal{A}$ všech uzavřených termů nad abecedou $\mathcal{A}$ nazýváme **Herbrandovo univerzum** a množinu $B_\mathcal{A}$ všech uzavřených atomických formulí nad abecedou $\mathcal{A}$ nazýváme **Herbrandova báze**. Pojmy pocházejí z disertační práce francouzského matematika *Jacquese Herbranda* (1908–1931).

Herbrandovým univerzem a Herbrandovou bází pro program P myslíme Herbrandovo univerzum a Herbrandovu bázi pro abecedu indukovanou programem; značíme je postupně U_P a B_P. Například:

$$U_{P_1} = \{zero, succ(zero), succ(succ(zero)), \ldots\},$$
$$B_{P_1} = \{even(zero), even(succ(zero)), even(succ(succ(zero))), \ldots\}.$$

Herbrandovou interpretací programu P rozumíme interpretaci $\mathcal{I}$ s doménou U_P, která každému funkčnímu symbolu f/n přiřazuje funkci $f^\mathcal{I}$ splňující

$$f^\mathcal{I}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$$

pro každé $t_1, \ldots, t_n \in U_P$.

Herbrandova interpretace tedy každému relačnímu symbolu r/n přiřazuje relaci $r^\mathcal{I}$, která je podmnožinou $(U_P)^n$.

Pro Herbrandovu interpretaci $\mathcal{I}$ platí, že $v_\mathcal{I}(t) = t$ pro každý uzavřený term t a ohodnocení v.

Herbrandovu interpretaci můžeme tedy zadat jen interpretací všech relačních symbolů. Například jedna možná Herbrandova interpretace $\mathcal{I}_1$ programu P_1 je dána

$$even^{\mathcal{I}_1} = \{zero, succ(zero)\}.$$

Herbrandovu interpretaci také můžeme zadat podmnožinou Herbrandovy báze. Přesněji Herbrandovu interpretaci $\mathcal{I}$ ztotožňujeme s množinou $\{A \in B_\mathcal{A} \mid \mathcal{I} \vDash A\}$. Například $\mathcal{I}_1 = \{even(zero), even(succ(zero))\}$.

Herbrandův model teorie T je Herandova interpretace, která je modelem teorie T. Z Tvrzení 2 přímo dostáváme, že Herbrandova báze definitního programu je vždy jeho modelem.

Například $\mathcal{I}_1$ a $\mathcal{I}_2 = \emptyset$ nejsou Herbrandovým modelem programu P_1, ale

$$\mathcal{I}_2 = \{even(succ^n(zero)) \mid n \text{ je sudé přirozené číslo}\},$$
$$\mathcal{I}_4 = B_{P_1}$$

jsou modely definitního programu P_1.

Všechny modely definitního programu

$$male(adam).$$
$$female(eve).$$

jsou:

$$\{male(adam), female(eve)\},$$
$$\{male(adam), female(eve), male(eve)\},$$
$$\{male(adam), female(eve), female(adam)\},$$
$$\{male(adam), female(eve), male(eve), female(adam)\}.$$