KATEDRA
INFORMATIKY
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

JAN LAŠTOVIČKA
https://www.inf.upol.cz/lide/jan-lastovicka

LOGICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

3. Nejmenší Herbrandův model

poznámky k přednášce, verze z 9. listopadu 2026

Substitucí rozumíme zobrazení θ množiny všech proměnných do množiny všech termů takové, že **doména substituce** $\mathrm{Dom}(\theta) = \{x \mid x \neq \theta(x)\}$ je konečná. Notace $\{X_1/t_1, \ldots, X_n/t_n\}$ označuje substituci θ takovou, že $\mathrm{Dom}(\theta) = \{X_1, \ldots, X_n\}$ a $t_i = \theta(X_i)$ pro každé $1 \leq i \leq n$.

Ablikace substituce θ na **term** t (označená $t\theta$) je term definovaný následovně:

1. Jestliže t je proměnná X, pak $X\theta = \theta(X)$;
2. Jestliže t je tvaru $f(t_1, \ldots, t_n)$, pak $f(t_1, \ldots, t_n)\theta = f(t_1\theta, \ldots, t_n\theta)$.

Term $t\theta$ se nazývá **instance termu** t.

Ablikace substituce θ na **formuli** φ (označená $\varphi\theta$) je formule definovaná následovně:

1. Jestliže φ je $\Box$, pak $\Box\theta = \Box$;
2. Jestliže φ je tvaru $r(t_1, \ldots, t_n)$, pak $r(t_1, \ldots, t_n)\theta = r(t_1\theta, \ldots, t_n\theta)$;
3. Jestliže φ je tvaru $\neg\psi$, pak $(\neg\psi)\theta = \neg(\psi\theta)$;
4. Jestliže φ je tvaru $\psi \to \chi$, pak $(\psi \to \chi)\theta = (\psi\theta) \to (\chi\theta)$;
5. Jestliže φ je tvaru $(\forall X)\psi$, pak $(\forall X)\psi = (\forall X_1) \cdots (\forall X_n)(\psi\theta)$, kde $\{X_1, \ldots, X_n\} = \mathrm{var}(X\theta)$.

Například $((\forall X)(\forall Y)r(X, Y))\{X/f(A, B)\} = (\forall A)(\forall B)(\forall Y)r(f(A, B), Y)$.

Formule $\varphi\theta$ se nazývá **instance formule** φ.

Písmeno $\mathcal{I}$ označuje Herbrandovu interpretaci a v je ohodnocení.

Substitucí odvozenou z ohodnocení v **pro** konečnou množinu proměnných V rozumíme substituci $\{X/v(X) \mid X \in V\}$.

Tvrzení 1. *Nechť t je term a θ je substituce odvozená z ohodnocení v pro V, kde $\mathrm{var}(t) \subseteq V$. Pak $v_{\mathcal{I}}(t) = t\theta$.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme strukturální indukcí. Jestliže t je proměnná X, pak $X\theta = v(X) = v_{\mathcal{I}}(X)$. Jestliže je t tvaru $f(t_1, \ldots, t_n)$, pak $f(t_1, \ldots, t_n)\theta = f(t_1\theta, \ldots, t_n\theta) = f^{\mathcal{I}}(v_{\mathcal{I}}(t_1), \ldots, v_{\mathcal{I}}(t_n)) = v_{\mathcal{I}}(f(t_1, \ldots, t_n))$. □

Tvrzení 2. *Nechť A je atom a θ je substituce odvozená z ohodnocení v pro $\mathrm{var}(A)$. Pak $\mathcal{I} \vDash_v A$ právě tehdy, když $A\theta \in \mathcal{I}$.*

Důkaz. Nechť A je tvaru $r(t_1, \ldots, t_n)$. Pak $\mathcal{I} \vDash_v r(t_1, \ldots, t_n)$ právě tehdy, když $(v_{\mathcal{I}}(t_1), \ldots, v_{\mathcal{I}}(t_n)) \in r^{\mathcal{I}}$ což platí podle Tvrzení 1 právě tehdy, když $(t_1\theta, \ldots, t_n\theta) \in r^{\mathcal{I}}$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \vDash r(t_1\theta, \ldots, t_n\theta) = r(t_1, \ldots, t_n)\theta$ což je, vzhledem k tomu, že $\mathcal{I}$ je Herbrandova interpretace, to samé jako $r(t_1, \ldots, t_n)\theta \in \mathcal{I}$. □

Tvrzení 3. *Nechť φ je formule bez kvantifikátorů a θ je substituce odvozená z ohodnocení v pro* $\mathrm{var}(\varphi)$*. Pak $\mathcal{I} \models_v \varphi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \models \varphi\theta$.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme strukturální indukcí. Platnost tvrzení pro konstantu $\square$ je zřejmá. Platnost pro atomy vyplývá z Tvrzení 2, neboť pro uzavřený atom A je $A \in \mathcal{I}$ to samé jako $\mathcal{I} \models A$.

Dokážeme platnost tvrzení pro implikaci. Předpokládejme platnost tvrzení pro formule ψ_1 a ψ_2. Nechť θ_1 (resp. θ_2) je substituce z tvrzení pro ψ_1 (resp. ψ_2) a $\theta = \theta_1 \cup \theta_2$. Pak $\mathcal{I} \models_v \psi_1 \to \psi_2$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \models_v \psi_2$, kdykoli $\mathcal{I} \models_v \psi_1$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \models \psi_2\theta_2$, kdykoli $\mathcal{I} \models \psi_1\theta_1$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \models \psi_1\theta_1 \to \psi_2\theta_2$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \models \psi_1\theta \to \psi_2\theta = (\psi_1 \to \psi_2)\theta$.

Dokážeme platnost tvrzení pro negaci. Předpokládejme platnost tvrzení pro formuli ψ. Nechť θ je substituce z tvrzení pro ψ. Pak $\mathcal{I} \models_v \neg\psi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \not\models_v \psi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \not\models \psi\theta$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \models \neg(\psi\theta) = (\neg\psi)\theta$. $\square$

Tvrzení 4. *Nechť φ je formule bez kvantifikátorů. Pak*

1. *$\mathcal{I} \models \forall\varphi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \models \varphi\theta$, pro každou uzavřenou instanci $\varphi\theta$ formule φ.*
2. *$\mathcal{I} \models \exists\varphi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \models \varphi\theta$, pro nějakou uzavřenou instanci $\varphi\theta$ formule φ.*

Důkaz. Dokážeme pouze první bod. Důkaz druhého bodu je analogický. Máme $\mathcal{I} \models \forall\varphi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \models_v \varphi$ pro každé ohodnocení v, což platí použitím Tvrzení 3 právě tehdy, když $\mathcal{I} \models \varphi\theta$ pro každou substituci θ takovou, že $\varphi\theta$ je uzavřená formule. $\square$

V příkladech se budeme obracet k definitnímu programu P_1:

$$\begin{aligned} &even(zero).\\ &even(succ(succ(N))) \leftarrow even(N)). \end{aligned}$$

Z použitím předchozího tvrzení ukážeme, že $\mathcal{I}_1 = \{even(succ^n(zero)) \mid n \text{ je sudé}\}$ je Herbrandův model definitního programu P_1. Zřejmě $even(zero) \in \mathcal{I}_1$. Pro prokázání, že $\mathcal{I}_1 \models (\forall N)(even(succ(succ(N))) \leftarrow even(N)) = \forall\varphi$ stačí ukázat podle předchozího tvrzení, že $\mathcal{I}_1 \models \varphi\theta$ pro každou uzavřenou instanci $\varphi\theta$ formule φ. Nechť $\varphi\theta$ je uzavřená instance formule φ. Musíme dokázat, že $\mathcal{I}_1 \models even(succ(succ(N)))\theta \leftarrow even(N)\theta$. Nechť $even(N)\theta \in \mathcal{I}_1$. Pak $N\theta = succ^n(zero)$ pro nějaké sudé číslo n. Protože $succ(succ(N))\theta = succ^{n+2}(zero)$ a $n+2$ je sudé, je $even(succ(succ(N)))\theta = even(succ^{n+2}(zero)) \in \mathcal{I}_1$.

Průnikem neprázdné množiny množin A rozumíme množinu $\bigcap A$ právě těch objektů, které jsou prvky každé množiny náležící do A.

Tvrzení 5. *Nechť M je neprázdná množina Herbrandovo modelů definitního programu P. Pak průnik množiny M je Herbrandův model programu P.*

Důkaz. Označme $\mathcal{I} = \bigcap M$. Dokážeme, že $\mathcal{I}$ je model P. Nechť $\forall\varphi = \forall(A_0 \leftarrow (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \in P$. Pro prokázání, že $\mathcal{I} \models \forall\varphi$ stačí ukázat podle Tvrzení 4, že $\mathcal{I} \models \varphi\theta$ pro každou uzavřenou instanci $\varphi\theta$ formule φ. Nechť $\varphi\theta$ je uzavřená instance formule φ. Máme ukázat, že $\mathcal{I} \models A_0\theta \leftarrow (A_1\theta \wedge \cdots \wedge A_n\theta)$ což platí právě tehdy, když $A_0\theta \in \mathcal{I}$, kdykoli $A_1\theta, \cdots, A_n\theta \in I$. Využijeme toho, že uzavřený atom je v $\mathcal{I}$ právě tehdy, když je v každé množině, která je prvkem množiny M. Nechť $\mathcal{J} \in M$ a $A_1\theta, \cdots, A_n\theta \in \mathcal{I}$. Dostáváme, že $A_1\theta, \cdots, A_n\theta \in \mathcal{J}$. Protože $\mathcal{J}$ je model P, platí opět podle Tvrzení 4, že $\mathcal{J} \models A_0\theta \leftarrow (A_1\theta \wedge \cdots \wedge A_n\theta)$. Tedy $A_0\theta \in \mathcal{J}$. Proto i $A_0\theta \in \mathcal{I}$. $\square$

Protože B_P je vždy Herbrandův model definitního programu P, je množina M všech Herbrandovo modelů neprázdná. Podle předchozího tvrzení je $\bigcap M$ nejmenší Herbrandův model. Budeme jej značit M_P.

Interpretace $\mathcal{I}_1$ je nejmenší Herbrandův model definitního programu P_1. Stačí dokázat, že $\mathcal{I}_1$ je minimální Herbrandův model definitního programu P_1. Předpokládejme, že existuje Herbrandův model $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}_1$ definitního programu P_1. Z definice modelu $\mathcal{I}_1$ plyne, že existuje sudé číslo n takové, že $even(succ^n(zero)) \notin \mathcal{J}$. Protože $even(succ^0(zero))$ musí být v $\mathcal{J}$, existuje nejmenší přirozené číslo m

takové, že $even(succ^m(zero)) \in \mathcal{J}$, ale $even(succ^{m+2}(zero)) \notin \mathcal{J}$. Protože $\mathcal{J}$ je modelem P_1 musí být formule $even(succ^{m+2}(zero)) \leftarrow even(succ^m(zero))$ v $\mathcal{J}$ pravdivá. Z toho ale plyne, že $even(succ^{m+2}(zero) \in \mathcal{J}$, což je spor a proto je $\mathcal{I}_1$ nejmenší Herbrandův model definitního programu P_1.

Tvrzení 6. *Nechť T je teorie obsahující pouze hornovské klauzule a $\mathcal{I}$ je model teorie T. Pak množina všech uzavřených atomů pravdivých v $\mathcal{I}$ je Herbrandův model teorie T.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{J} = \{A \in B_P \mid \mathcal{I} \vDash A\}$. Dokážeme, že $\mathcal{J}$ je modelem teorie T. Nechť $\forall\varphi = \forall(A_0 \leftarrow (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)) \in T$. Následujeme Tvrzení 4. Nechť $\varphi\theta$ je uzavřená instance formule φ. Musíme ukázat, že $\mathcal{J} \vDash A_0\theta \leftarrow (A_1\theta \wedge \cdots \wedge A_n\theta)$. Nechť $A_1\theta, \ldots, A_n\theta \in \mathcal{J}$. Podle definice $\mathcal{J}$ platí, že $\mathcal{I} \vDash A_1\theta, \ldots, A_n\theta$. Nechť u, v jsou ohodnocení v interpretaci $\mathcal{I}$, kde u je libovolné a v splňuje $v(X) = u_{\mathcal{I}}(X\theta)$ pro každou proměnnou formule φ. Pak $\mathcal{I} \vDash_v A_1, \ldots, A_n$. Protože $\forall\varphi$ je pravdivé v $\mathcal{I}$, platí $\mathcal{I} \vDash_v A_0$. Proto $\mathcal{I} \vDash A_0\theta$ a tedy i $\mathcal{J} \vDash A_0\theta$. □

Uvažujme model $\mathcal{I}_2$ definitního programu T_1 takový, že $|\mathcal{I}_2| = \mathbb{N}_0$, $zero^{\mathcal{I}_2} = 0$, $succ^{\mathcal{I}_2}(n) = n + 1$ a $even^{\mathcal{I}_2}$ je množina všech sudých přirozených čísel. Pak $\{A \in B_P \mid \mathcal{I}_2 \vDash A\} = \{even(succ^n(zero)) \mid n \text{ je sudé}\} = \mathcal{I}_1$.

Tvrzení 7. *Nechť P je definitní program a G definitní cíl. Pak $\neg G$ vyplývá z P právě tehdy, když je $\neg G$ pravdivé v nejmenším Herbrandově modelu.*

Důkaz. Zřejmě platí, že jestliže $P \vDash \neg G$, pak $M_P \vDash \neg G$.

Nechť $P \nvDash \neg G$. Podle předchozí přednášky má teorie $T = P \cup \{G\}$ nějaký model a použitím Tvrzení 6 obdržíme její Herbrandův model $\mathcal{I}$. Jistě $M_P \subseteq \mathcal{I}$. Předpokládejme, že $\neg G$ je pravdivá v M_P. Protože $\neg G$ je ekvivalentní $\exists(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$, je i $\exists(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ je pravdivá v M_P. Podle Tvrzení 4 existuje substituce θ taková, že všechny uzavřené atomy $A_1\theta, \ldots, A_n\theta$ jsou pravdivé v M_P. Protože $M_P \subseteq \mathcal{I}$ jsou $A_1\theta, \ldots, A_n\theta$ pravdivé i v $\mathcal{I}$. Tedy G je nepravdivá v $\mathcal{I}$, ale to ve sporu s tím, že $\mathcal{I}$ je model $P \cup \{G\}$. Proto platí $M_P \nvDash \neg G$. □

Podle předchozího tvrzení je $P_1 \vDash even(succ^n(zero))$ právě tehdy, když $M_{P_1} \vDash even(succ^n(zero))$ právě tehdy, když n je sudé.

Tvrzení 8. *Nejmenší Herbrandův model definitního programu je množina všech uzavřených atomů z něj vyplývajících.*

Důkaz. Nechť P je definitní program. Máme dokázat, že $M_P = \{A \in B_P \mid P \vDash A\}$.

Nechť A je uzavřený atom. Pak $\neg A$ je definitní cíl a podle Tvrzení 7 platí, že $P \vDash \neg\neg A$ právě tehdy, když $M_P \vDash \neg\neg A$. Ekvivalence formulí $\neg\neg A$ a A uzavírá důkaz. □