KATEDRA
INFORMATIKY
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

JAN LAŠTOVIČKA
https://www.inf.upol.cz/lide/jan-lastovicka

4. Konstrukce nejmenšího Herbrandova modelu

Logické programování

poznámky k přednášce, verze z 19. října 2026

1 Nejmenší pevný bod

Nechť L je množina, na které je dáno uspořádání $\leq$. Tedy $\leq$ je binární relace na L, která je reflexivní, tranzitivní a antisymetrická. Písmena x, y, z označují prvky množiny L a X, Y, Z její podmnožiny. Vztah $x \leq y$ čteme tak, že x **je menší nebo rovno** y nebo, že y **je větší nebo rovno** x.

Objekt x nazveme **horní závorou** množiny X, jestliže je větší nebo roven každému prvku množiny X. Duálně x nazveme **dolní závorou** množiny X, jestliže je každý prvek množiny X větší nebo roven prvku x. **Infimem** $\bigwedge X$ (**supremem** $\bigvee X$) množiny X rozumíme její největší dolní závoru (nejmenší horní závoru).

O uspořádané množině L řekneme, že je **úplným svazem**, jestliže každá její podmnožina má infimum a supremum. Například jednotkový interval reálných čísel spolu s přirozeným uspořádáním čísel je úplným svazem.

Předpokládejme dále, že L je úplný svaz. Úplný svaz L má největší (nejmenší) prvek, který je roven supremu (infimu) množiny L.

Písmeno f označuje zobrazení množiny L do množiny L. O zobrazení f řekneme, že je **monotonní**, jestliže $f(x) \leq f(y)$ kdykoli $x \leq y$. Objekt x nezveme **pevným bodem** zobrazení f, jestliže $f(x) = x$.

Tvrzení 1. *Nechť L je úplný svaz a f je monotonní zobrazení. Poté zobrazení f má nejmenší pevný bod, který je infimem množiny všech objektů x, které splňují $f(x) \leq x$.*

Důkaz. Označme X množinu právě těch objektů x, pro které $f(x) \leq x$. Zřejmě je X neprázdná množina, protože obsahuje největší prvek úplného svazu L. Označme infimum množiny X písmenem a. Ukážeme, že a je pevným bodem zobrazení f.

Dokážeme $f(a) \leq a$. Protože a je dolní závora množiny X, je menší nebo rovno každému jejímu prvku. Nechť $x \in X$. Poté $a \leq x$ a také $f(a) \leq f(x) \leq x$. Tedy $f(a)$ je dolní závora množiny X a proto $f(a) \leq a$.

Dokážeme $a \leq f(a)$. Z $f(a) \leq a$ plyne $f(f(a)) \leq f(a)$. Tedy $f(a)$ je prvkem množiny X. Protože a je dolní závora množiny X, je $a \leq f(a)$.

Nechť b je pevný bod zobrazení f. Dokážeme $a \leq b$. Z $f(b) = b$ plyne, že $b \in X$. Protože a je dolní závora množiny X, je $a \leq b$. □

Nejmenší pevný bod monotonního zobrazení f označíme $\mathrm{lfp}(f)$ podle anglického překladu *the least fix point*). Písmena m, n označují přirozená čísla. O zobrazení f dále předpokládáme, že je monotonní.

Rekurzivně definujeme množinu $f \uparrow n$ pro každé n pravidly:

$$f \uparrow 0 = \emptyset,$$
$$f \uparrow n = f(f \uparrow_{n-1}) \text{ pro } n > 0.$$

Tvrzení 2. *Pro každé n platí, že*

1. *$f \uparrow n$ je menší nebo rovno $f \uparrow (n+1)$;*

2. *$f \uparrow n$ je menší nebo rovno nejmenšímu pevnému bodu zobrazení f.*

Důkaz. 1. Dokážeme indukcí. Jistě platí, že $f \uparrow 0 = \emptyset \leq f \uparrow 1$. Jestliže $f \uparrow n \leq f \uparrow (n+1)$, pak $f \uparrow (n+1) = f(f \uparrow n) \leq f(f \uparrow (n+1)) = f \uparrow (n+2)$.

2. Opět dokážeme indukcí. Zřejmě $f \uparrow 0 = \emptyset \leq \mathrm{lfp}(f)$. Jestliže $f \uparrow n \leq \mathrm{lfp}(f)$, pak $f \uparrow (n+1) = f(f \uparrow n) \leq f(\mathrm{lfp}(f)) = \mathrm{lfp}(f)$.

□

Tvrzení 3. *Pro každé $n \leq m$ je $f \uparrow n \subseteq f \uparrow m$.*

Důkaz. Důkaz vedeme indukcí přes přirozené číslo m. Pro $m = 0$ tvrzení platí evidentně. Předpokládejme, že tvrzení platí pro m. Ukážeme, že pro každé $n \leq m+1$ je $f \uparrow n \subseteq f \uparrow (m+1)$. Jistě tvrzení platí pro $n = 0$. Předpokládejme tedy, že $n > 0$. Pak $f \uparrow n = f(f \uparrow (n-1))$. Chceme ukázat, že $f(f \uparrow (n-1)) \subseteq f(f \uparrow m)$. To však plyne z indukčního předpokladu a monotonicity zobrazení f. □

Položíme:

$$f \uparrow \omega = \bigvee \{f \uparrow n \mid n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Tvrzení 4. *Prvek $f \uparrow \omega$ je menší nebo roven nejmenšímu pevnému bodu zobrazení f.*

Důkaz. Platí, že $f \uparrow \omega = \bigvee \{f \uparrow n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ je menší nebo rovno $\mathrm{lfp}(f)$ právě tehdy, když $f \uparrow n \leq \mathrm{lfp}(f)$ pro každé n, což je ale díky Tvrzení 2 pravda. □

Potenční množinou množiny U rozumíme množinu $\mathcal{P}(U)$ všech podmnožin množiny U. **Sjednocením množiny množin** A rozumíme množinu $\bigcup A$ právě těch objektů, které jsou prvky nějaké množiny náležící do A. **Průnikem neprázdné množiny množin** A rozumíme množinu $\bigcap A$ právě těch objektů, které jsou prvky každé množiny náležící do A. Potenční množina $\mathcal{P}(U)$ libovolné množiny U spolu s množinovou inkluzí $\subseteq$ je úplným svazem; pro $X \subseteq \mathcal{P}(U)$ je infimum neprázdné množiny X rovno jejímu průniku, infimum prázdné množiny je rovno množině U a supremum množiny X je rovno jejímu sjednocení.

Předpokládejme dále, že $L = \mathcal{P}(U)$ pro nějakou množinu U a relace $\leq$ splývá s množinovou inkluzí. O zobrazení f řekneme, že je **finitární**, jestliže pro každou množinu $X \subseteq L$ a každý prvek $x \in U$ takový, že $x \in f(X)$ platí, že existuje konečná množina $Y \subseteq X$ taková, že $x \in f(Y)$.

Tvrzení 5. *Jestliže je f finitární, pak $f \uparrow \omega$ je nejmenší pevný bod zobrazení f.*

Důkaz. Podle Tvrzení 4 víme, že $f \uparrow \omega \subseteq \mathrm{lfp}(f)$. Pro důkaz $\mathrm{lfp}(f) \subseteq f \uparrow \omega$ stačí podle Tvrzení 1 ukázat $f(f \uparrow \omega) \subseteq f \uparrow \omega$. Nechť $x \in f(f \uparrow \omega)$. Poté existuje nějaká konečná podmnožina X množiny $f \uparrow \omega$ taková, že $x \in f(X)$. Protože $f \uparrow \omega = \bigcup \{f \uparrow n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, pak pro každé $y \in X$ existuje přirozené číslo n_y takové, že $y \in f \uparrow n_y$. Nechť m je maximální číslo z množiny $\{n_y \mid y \in X\}$. Podle Tvrzení 3 platí, že $y \in f \uparrow m$ pro každé $y \in X$ a tedy $X \subseteq f \uparrow m$. Dostáváme, že $x \in f(X) \subseteq f(f \uparrow m) \subseteq f \uparrow (m+1) \subseteq f \uparrow \omega$. □

2 Operátor bezprostředního důsledku

Nechť P je definitní program. Množina všech Herbrandových interpretací spolu s množinovou inkluzí je úplným svazem.

Označme $ground(P)$ množinu všech uzavřených instancí jader definitních klauzulí definitního programu P; symbolicky

$$ground(P) = \{\varphi\theta \mid \forall \varphi \in P \text{ a } \varphi\theta \text{ je uzavřená}\}.$$

Například

$$ground(P_1) = \{even(zero), even(succ^{n+2}(zero)) \leftarrow even(succ^n(zero)) \mid n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Definujeme zobrazení $T_P \colon \mathcal{P}(B_P) \to \mathcal{P}(B_P)$ tak, že položíme

$$T_P(I) = \{A_0 \mid A_0 \leftarrow A_1, \ldots, A_n \in \mathit{ground}(P) \text{ a } \{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq I\}$$

pro každé $I \subseteq B_P$.

Například $T_{P_1}(\emptyset) = \{even(zero\}$, $T_{P_1}(\{even(succ(zero))\}) = \{even(zero), even(succ^3(zero))\}$. Poslední příklad dokazuje, že obecně neplatí $I \subseteq T_P(I)$.

Máme:

$$\begin{aligned} T_{P_1} \uparrow 1 &= \{even(zero)\}, \\ T_{P_1} \uparrow 2 &= \{even(zero), even(succ(succ(zero)))\}, \\ T_{P_1} \uparrow 3 &= \{even(zero), even(succ^2(zero)), even(succ^4(zero))\}. \end{aligned}$$

Dokážeme, že $T_{P_1} \uparrow n = \{even(succ^m(zero)) \mid m < 2n \text{ a } m \text{ je sudé}\}$. Důkaz vedeme indukcí. Tvrzení zřejmě platí pro n rovno nule a jedné. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n > 1$. Podle prvního bodu Tvrzení 2 je $T_{P_1} \uparrow n \subseteq T_{P_1} \uparrow (n+1)$. Stačí tedy ukázat, že $even(succ^{2n}(zero)) \in T_{P_1} \uparrow (n+1)$. To však platí, protože z indukčního předpokladu víme, že $even(succ^{2n-2}(zero)) \in T_{P_1} \uparrow n$ a $even(succ^{2n}(zero)) \leftarrow even(succ^{2n-2}(zero)) \in \mathit{ground}(P_1)$.

Dále máme $even(succ^m(zero)) \in T_{P_1} \uparrow \omega$ právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že $even(succ^m(zero)) \in T_{P_1} \uparrow n$ právě tehdy, když m je sudé. Tedy $T_{P_1} \uparrow \omega = \{even(succ^n(zero)) \mid n \text{ je sudé}\}$.

Tvrzení 6. *Zobrazení T_P je finitární.*

Důkaz. Nechť $I \subseteq B_P$, $A_0 \in B_P$ takové, že $A_0 \in T_P(I)$. Poté existuje formule $A_0 \leftarrow (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \in \mathit{ground}(P)$ taková, že $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq I$. Množina $\{A_1, \ldots, A_n\}$ je konečná a $A_0 \in T_P(\{A_1, \ldots, A_n\})$. □

Tvrzení 7. *Zobrazení f je monotonní.*

Důkaz. Nechť $I_1 \subseteq I_2 \subseteq B_P$ a $A_0 \in T_P(I_1)$. Pak existuje formule $A_0 \leftarrow A_1, \ldots, A_n \in \mathit{ground}(P)$ taková, že $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq I_1$, ale $I_1 \subseteq I_2$ a proto je A_0 i v $T_P(I_2)$. □

Tvrzení 8. *Nechť $\mathcal{I}$ je Herbrandova interpretace. Poté je $\mathcal{I}$ Herbrandův model programu P právě tehdy, když $T_P(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{I}$ je Herbrandův model programu P a $A_0 \in T_P(\mathcal{I})$. Pak existuje uzavřená instance $A_0 \leftarrow (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ jádra nějaké definitní klauzle z programu P taková, že $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \mathcal{I}$. Protože $\mathcal{I}$ je model P, je $A_0 \in \mathcal{I}$.

Nechť $T_P(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$, $A_0 \leftarrow (A_1 \wedge \cdots A_n)$ je uzavřená instance jádra nějaké definitní klauzle z programu P a $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \mathcal{I}$. Pak $A_0 \in T_P(\mathcal{I})$, ale i $A_0 \in \mathcal{I}$.

□

Tvrzení 9. *Nejmenší Herbrandův model definitního programu P je $T_P \uparrow \omega$.*

Důkaz. Nejmenší Herbrandův model definitního programu P je podle předchozí přednášky roven průniku množiny X všech Herbrandových modelů definitního programu P. Množina X je ale podle Tvrzení 8 rovna množině všech $\mathcal{I} \subseteq B_P$ splňujících $T_P(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$. Infimum X je podle Tvrzení 1 rovno nejmenšímu pevnému bodu zobrazení T_P. Protože T_P je podle Tvrzení 6 finitární, je infimum X podle Tvrzení 5 rovno $T_P \uparrow \omega$.

□

Důkaz předchozího tvrzení lze provést i bez použití nejmenšího pevného bodu zobrazení f.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že $M_P \subseteq T_P \uparrow \omega$. Protože M_P je nejmenší model definitního programu P, stačí ověřit že $T_P \uparrow \omega$ je model definitního programu P. Nechť $\forall\varphi = \forall(A_0 \leftarrow (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \in P$. Dokážeme $T_P \uparrow \omega \vDash \forall\varphi$. Podle předchozí přednášky stačí ukázat, že $T_P \uparrow \omega \vDash \varphi\theta$ pro každou uzavřenou instanci $\varphi\theta$ formule φ. Nechť tedy $\varphi\theta$ je nějaká uzavření instance formule φ. Ukážeme, že $T_P \uparrow \omega \vDash A_0\theta \leftarrow$

$(A_1\theta \wedge \cdots \wedge A_n\theta)$. Nechť $A_1\theta, \ldots, A_n\theta \in T_P \uparrow \omega$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že $A_1\theta, \ldots, A_n\theta \in T_P \uparrow n$. Protože $\varphi\theta \in \mathit{ground}(P)$, platí, že $A_0\theta \in T_P(T_P \uparrow n)$, tedy také $A_0\theta \in T_P \uparrow \omega$.

Nyní dokážeme, že $T_P \uparrow \omega \subseteq M_P$. Stačí ukázat, že $T_P \uparrow n \subseteq M_P$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, což ukážeme indukcí. Pro $n = 0$, jistě dostáváme, že $T_P \uparrow 0 = \emptyset \subseteq M_P$. Předpokládejme, že $T_P \uparrow n \subseteq M_P$ platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}_0$. Dokážeme, že $T_P(T_P \uparrow n) \subseteq M_P$. Nechť $A_0 \in T_P(T_P \uparrow n)$. Pak existuje uzavřená instance $(A_0 \leftarrow (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n))\theta$ formule $\varphi = A_0 \leftarrow (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$, kde $\forall\varphi \in P$, a platí $\{A_1\theta, \ldots, A_n\theta\} \in T_P \uparrow n \subseteq M_P$. Protože M_P je model P, je $\forall\varphi$ pravdivá v M_P a podle předchozí přednášky je i formule $A_0\theta \leftarrow (A_1\theta \wedge \cdots \wedge A_n\theta)$ pravdivá v M_P. Protože všechny formule $A_1\theta, \ldots, A_n\theta$ jsou pravdivé v M_P, je zde pravdivá i formule $A_0\theta$. Čímž jsme prokázali, že $A_0\theta \in M_P$. □