KATEDRA
INFORMATIKY
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

JAN LAŠTOVIČKA
https://www.inf.upol.cz/lide/jan-lastovicka

LOGICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

7. Korektnost

poznámky k přednášce, verze z 9. listopadu 2026

Nechť je předem stanoven program P a výběrová funkce R. Označme $C = \forall(B_0 \leftarrow (B_1 \wedge \cdots \wedge B_n))$ variantu definitní klauzule z P a $G = \neg\exists(A_1 \wedge \cdots \wedge A_m)$ definitní cíl takový, že $\mathrm{var}(C) \cap \mathrm{var}(G) = \emptyset$. Nechť $1 \leq i \leq n$ a $G' = \mathrm{res}(G, A_i, C, \theta)$. Tedy

$$G' = \neg\exists(A_1\theta \wedge \cdots A_{i-1}\theta \wedge B_1\theta \wedge \cdots \wedge B_n\theta \wedge A_{i+1}\theta \wedge \cdots \wedge A_m\theta).$$

Tvrzení 1 (Slabá korektnost jednoho kroku)**.** *Jestliže $P \vDash \neg G'$, pak $P \vDash \neg G$.*

Důkaz. Nechť $P \vDash \neg G'$. Jistě je $\neg G'$ pravdivé v nejmenším Herbrandově modelu M_P programu P. Pak podle druhého bodu Tvrzení 4 z třetí přednášky existuje základní instance $\neg G'\sigma$ formule $\neg G'$ taková, že $M_P \vDash \neg G'\sigma = \neg\mathrm{res}(G, A_i, C, \theta)\sigma$ a tedy i $M_P \vDash \mathrm{body}(C)\theta\sigma$. Jistě $M_P \vDash C$ a proto podle prvního bodu Tvrzení 4 z třetí přednášky pro každou základní instanci tvaru $C\theta\sigma\lambda$ definitní klauzule C je $M_P \vDash C\theta\sigma\lambda$. Zvolme nějakou základní instanci $C\theta\sigma\lambda$ definitní klauzule C. Protože $\mathrm{body}(C)\theta\sigma$ je základní formule, $\mathrm{body}(C)\theta\sigma = \mathrm{body}(C)\theta\sigma\lambda$ a proto $M_P \vDash \mathrm{head}(C)\theta\sigma\lambda = A_i\theta\sigma\lambda$, ale pak $M_P \vDash \neg G\theta\sigma\lambda$ a opět podle druhého bodu Tvrzení 4 z třetí přednášky je $M_P \vDash \neg G$. Použitím Tvrzení 7 z třetí přednášky získáme $P \vDash \neg G$. □

Tvrzení 2 (Slabá korektnost)**.** *Jestliže existuje vyvrácení G, pak $P \vDash \neg G$.*

Důkaz. Dokážeme indukcí přes délku n vyvrácení definitního cíle G. Jestliže $n = 0$, pak $G = \square$ a jistě $P \vDash \neg G = \blacksquare$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna vyvrácení délky nejvýše n a nechť máme vyvrácení délky $n + 1$ a

$$G \xrightarrow[\theta]{C} G'$$

je první krok vyvrácení. Podle indukčního předpokladu $P \vDash \neg G'$ a použitím Tvrzení 1 platí i $P \vDash \neg G$. □

Množinou úspěchů definitního programu P za použití výběrové funkce R rozumíme množinu

$$\mathrm{success}_R(P) = \{A \in H_B \mid \text{existuje vyvrácení} \leftarrow A \text{ za použití } P \text{ a } R\}.$$

Tvrzení 3. *Množina úspěchů definitního programu P je podmnožinou nejmenšího Herbrandova modelu programu P.*

Důkaz. Nechť A je základní atom takový, že existuje vyvrácení cíle $\leftarrow A$ z P. Poté podle Trvzení 2 $P \vDash A$ a Tvrzení 8 z třetí přednášky nám dává $A \in M_P$. □

Nechť G je tvaru $\neg\exists\varphi$. Substituci θ, jejíž doména obsahuje pouze proměnné uvedené v cíli G, symbolicky $\mathrm{Dom}(\theta) \subseteq \mathrm{var}(G)$, nezveme **odpovědí** na G. Odpověď θ nazveme **správnou odpovědí** na G vzhledem k P, jestliže $P \vDash \forall(\varphi\theta)$.

Například $\{X/succ(Y)\}$ je správnou odpovědí na $leq(succ(zero), X)$ vzhledem k programu P rovnému

$$leq(zero, X).$$
$$leq(succ(X), succ(Y)) \leftarrow leq(X, Y).$$

protože $P \vDash (\forall Y) leq(succ(zero), succ(Y))$, ale $\{X/zero\}$ sice odpovědí je, ale ne správnou, protože $P \nvDash leq(succ(zero), zero)$.

Tvrzení 4. *Nechť φ, ψ, χ jsou formule bez kvantifikátorů. Poté platí*

$$\{\forall(\psi \leftarrow \varphi)\} \vDash \forall((\psi \wedge \chi) \leftarrow (\varphi \wedge \chi)).$$

Důkaz. Nechť $\mathcal{I}$ je model $\{\forall(\psi \leftarrow \varphi)\}$, v a ohodnocení takové, že $\mathcal{I} \vDash_v \varphi \wedge \chi$. Dokážeme, že $\mathcal{I} \vDash_v \psi \wedge \chi$. Zřejmě $\mathcal{I} \vDash_v \chi$ a stačí tedy ukázat, že $\mathcal{I} \vDash_v \psi$. Protože $\mathcal{I} \vDash \forall(\psi \leftarrow \varphi)$, platí $\mathcal{I} \vDash_v \psi \leftarrow \varphi$, ale $\mathcal{I} \vDash_v \varphi$ a tedy i $\mathcal{I} \vDash_v \psi$. □

Tvrzení 5. *Nechť φ je formule bez kvantifikátorů a T teorie. Poté jestliže $T \vDash \forall\varphi$, pak $T \vDash \forall(\varphi\theta)$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $T \vDash \forall\varphi$. Nechť $\mathcal{I}$ je model teorie T a v je ohodnocení. Dokážeme $\mathcal{I} \vDash_v \varphi\theta$. Nechť u je ohodnocení definované rovností $u(X) = v(X\theta)$ pro každou proměnnou X. Jistě pro každý term t platí, že $u_{\mathcal{I}}(t) = v_{\mathcal{I}}(t\theta)$ a tedy pro každý atom A platí, že $\mathcal{I} \vDash_u A$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \vDash_v A\theta$. Tedy i $T \vDash_u \varphi$ právě tehdy, když $T \vDash_v \varphi\theta$, ale $T \vDash_u \varphi$ plyne z předpokladu. □

Tvrzení 6 (Silná korektnost jednoho kroku)**.** *Platí*

$$\{C\} \vDash \forall(((A_1 \wedge \cdots \wedge A_m) \leftarrow (A_1 \wedge \cdots \wedge A_{i-1} \wedge B_1 \wedge \cdots \wedge B_n \wedge A_{i+1} \wedge \cdots \wedge A_m))\theta).$$

Důkaz. Z Tvrzení 4 dostáváme, že

$$\{C\} \vDash \forall((A_1 \wedge \cdots \wedge A_{i-1} \wedge B_0 \wedge A_{i+1} \wedge \cdots \wedge A_m) \leftarrow (A_1 \wedge \cdots \wedge A_{i-1} \wedge B_1 \wedge \cdots \wedge B_n \wedge A_{i+1} \wedge \cdots \wedge A_m))$$

dokazované tvrzení platí použitím Tvrzení 5, neboť $A_i\theta = B_0\theta$.

□

Tvrzení 7 (Vyplývání je monotonní)**.** *Jestliže φ vyplývá z teorie T_1 a T_2 je teorie, která je nadmnožinou T_1, pak φ vyplývá i z T_2.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{I}$ je model teorie T_2. Jelikož $T_1 \subseteq T_2$, pak $\mathcal{I}$ je model i T_1, ale $T_1 \vDash \varphi$ a proto $\mathcal{I} \vDash \varphi$. □

Tvrzení 8 (Tranzitivita implikace)**.** *Nechť T je teorie a φ, ψ, χ jsou formule. Jestliže $T \vDash \forall(\varphi \to \psi)$ a $T \vDash \forall(\psi \to \chi)$, pak $T \vDash \forall(\varphi \to \chi)$.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{I}$ je model T, v ohodnocení a $\mathcal{I} \vDash_v \varphi$. Z předpokladů plyne, že ($\mathcal{I} \vDash_v \psi$ kdykoliv $\mathcal{I} \vDash_v \varphi$) a ($\mathcal{I} \vDash_v \chi$ kdykoliv $\mathcal{I} \vDash_v \psi$). Tedy $\mathcal{I} \vDash_v \chi$. □

Tvrzení 9 (Silná korektnost)**.** *Každá vypočítaná odpověď na G je správnou odpovědí na G.*

Důkaz. Nechť θ je vypočítaná odpověď na G. Pak existuje vyvrácení $G_0, G_1, \ldots, G_n = \square$ definitního cíle G, kde $C_1, \ldots, C_n$ je příslušná posloupnost variant definitních klauzulí a $\theta_1, \ldots, \theta_n$ posloupnost použitých unifikátorů taková, že zúžení substituce $\theta_1 \cdots \theta_n$ na $\mathrm{var}(G)$ je rovno substituci θ. Označme pro $0 \leq i \leq n$ symbolem φ_i formuli takovou, že G_i je tvaru $\neg\exists\varphi_i$. Speciálně $\varphi_n = \blacksquare$. Poté podle Tvrzení 6 pro každé $1 \leq i \leq n$ platí, že

$$\{C_i\} \vDash \forall(\varphi_{i-1}\theta_i \leftarrow \varphi_i)$$

a tedy podle Tvrzení 7 platí, že

$$P \vDash \forall(\varphi_{i-1}\theta_i \leftarrow \varphi_i). \tag{1}$$

Indukcí dokážeme, že

$$P \models \forall(\varphi_0\theta_1 \cdots \theta_i \leftarrow \varphi_i) \tag{2}$$

pro $1 \leq i \leq n$. Pro $i = 1$ použijeme (1) a obdržíme, že

$$P \models \forall(\varphi_0\theta_1 \leftarrow \varphi_1).$$

Nechť tvrzení platí pro i. Dokážeme, že

$$P \models \forall(\varphi_0\theta_1 \cdots \theta_i\theta_{i+1} \leftarrow \varphi_{i+1}).$$

Použitím indukčního předpokladu a Tvrzení 5 dostáváme, že

$$P \models \forall(\varphi_0\theta_1 \cdots \theta_i\theta_{i+1} \leftarrow \varphi_i\theta_{i+1})$$

dále z (1) dostaneme, že

$$P \models \forall(\varphi_i\theta_{i+1} \leftarrow \varphi_{i+1}).$$

Použitím Tvrzení 8 obdržíme, že platí

$$P \models \forall(\varphi_0\theta_1 \cdots \theta_i\theta_{i+1} \leftarrow \varphi_{i+1}).$$

Tím je důkaz indukcí u konce. Z (2) pro $i = n$ obdržíme, že

$$P \models \forall(\varphi_0\theta_1 \cdots \theta_n \leftarrow \varphi_n)$$

Jenže $\varphi_n = \blacksquare$ a proto

$$P \models \forall(\varphi_0\theta_1 \cdots \theta_n)$$

Protože θ je zúžení substituce $\theta_1 \cdots \theta_n$ na $\mathrm{var}(\varphi_0)$, platí i

$$P \models \forall(\varphi_0\theta)$$

a tedy θ je správnou odpovědí na G vzhledem k P.

□