KATEDRA
INFORMATIKY
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

JAN LAŠTOVIČKA
https://www.inf.upol.cz/lide/jan-lastovicka

LOGICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

8. Úplnost – část první

poznámky k přednášce, verze z 16. listopadu 2026

V této přednášce může výběrová funkce zohlednit i pořadí kroku v odvozování. Přesněji: výběrová funkce R může v i-tém kroku odvození vybrat z neprázdného definitního cíle G podcíl $R(i, G)$.

Nechť θ_1 a θ_2 jsou substituce takové, že θ_1 je obecnější než θ_2 a θ_2 je obecnější než θ_1. Poté se substituce θ_1, θ_2 nazývají **variantní**. Například substituce $\{X/Y\}$ a $\{Y/X\}$ jsou variantní.

Uvažujme nejprve příklad, ve kterém máme definitní cíl

$$G_1 = \leftarrow leq(zero, X), leq(succ(succ(X)), succ(succ(zero)))$$

a definitní klauzule

$$C_1 = leq(zero, A), \quad C_2 = leq(succ(B), succ(C)) \leftarrow leq(B, C).$$

Na druhý podcíl cíle G_1 můžeme nejprve aplikovat klauzuli C_2 a použitím substituce $\theta_1 = \{B/succ(X), C/succ(zero)\}$ obdržet cíl $G_2 = \leftarrow leq(zero, X), leq(succ(X), succ(zero))$, na jehož první podcíl můžeme aplikovat klauzuli C_1 a s použitím $\theta_2 = \{X/A\}$ obdržet $G_3 = \leftarrow leq(succ(A), succ(zero))$. Můžeme ale také nejprve na první podcíl G_1 aplikovat C_1 a s použitím $\theta_1' = \{A/X\}$ obdržet $G_2' = \leftarrow leq(succ(succ(X)), succ(succ(zero))$ a nyní na zbývající podcíl aplikovat C_2 a s použitím $\theta_2' = \{B/succ(X), C/succ(zero)\}$ obdržet $G_3' = \leftarrow leq(succ(X), succ(zero))$. Substituce

$$\theta_1\theta_2 = \{B/succ(A), C/succ(zero), X/A\},$$
$$\theta_1'\theta_2' = \{A/X, B/succ(X), C/succ(zero)\}$$

jsou variantní. Následující lemma ukazuje, že při prohození aplikací definitních klauzulí vždy obdržíme variantní substituce.

Nechť je předem stanoven program P a výběrová funkce R. Písmeno G značí definitní cíl.

Lemma 1 (Prohazování odvozovacích kroků)**.** *Nechť G_1, G_2, G_3 jsou definitní cíle a A_1, A_2 jsou dva různé podcíle definitního cíle G_1. Dále nechť C_1, C_2 jsou definitní klauzule takové, že množiny* $\mathrm{var}(C_1)$ *a* $\mathrm{var}(C_2)$ *a* $\mathrm{var}(G_1)$ *jsou po dvou disjunktní a θ_1, θ_2 jsou substituce. Pak jestliže $G_2 = res(G_1, A_1, C_1, \theta_1)$ a $G_3 = res(G_2, A_2\theta_1, C_2, \theta_2)$, pak existují definitní cíle G_2', G_3' a substituce θ_1', θ_2' takové, že $G_2' = res(G_1, A_2, C_2, \theta_1')$ a $G_3' = res(G_2', A_1\theta_1', C_1, \theta_2')$ a substituce $\theta_1\theta_2$ a $\theta_1'\theta_2'$ jsou variantní.*

Důkaz. Protože θ_1 je nejobecnější unifikátor atomů A_1 a $\mathrm{head}(C_1)$ a θ_2 je nejobecnější unifikátor atomů $A_2\theta_1$ a $\mathrm{head}(C_2))$, platí

$$A_1\theta_1 = \mathrm{head}(C_1)\theta_1, \tag{1}$$
$$A_2\theta_1\theta_2 = \mathrm{head}(C_2)\theta_2. \tag{2}$$

Dále z toho, že $\text{var}(\text{head}(C_2)) \cap \text{Dom}(\theta_1) = \emptyset$, dostáváme, že

$$\text{head}(C_2) = \text{head}(C_2)\theta_1. \tag{3}$$

Proto

$$A_2\theta_1\theta_2 = head(C_2)\theta_2 = head(C_2)\theta_1\theta_2 \tag{4}$$

a tedy A_2 a $\text{head}(C_2)$ jsou unifikovatelné. Označme θ'_1 nejobecnější unifikátor atomů A_2 a $\text{head}(C_2)$. Jistě platí

$$A_2\theta'_1 = \text{head}(C_2)\theta'_1. \tag{5}$$

Můžeme položit $G'_2 = \text{res}(G_1, A_2, C_2, \theta)$. Vzhledem k tomu, že θ'_1 je obecnější než $\theta_1\theta_2$, musí existovat substituce σ_1 taková, že

$$\theta_1\theta_2 = \theta'_1\sigma_1. \tag{6}$$

Protože množiny $\text{var}(\text{head}(C_1))$ a $\text{Dom}(\theta'_1)$ jsou disjunktní,

$$\text{head}(C_1) = \text{head}(C_1)\theta'_1. \tag{7}$$

Dostáváme

$$\text{head}(C_1)\sigma_1 = \text{head}(C_1)\theta'_1\sigma_1 = \text{head}(C_1)\theta_1\theta_2 = A_1\theta_1\theta_2 = A_1\theta'_1\sigma_1. \tag{8}$$

Tedy $\text{head}(C_1)$ a $A_1\theta'_1$ jsou unifikovatelné. Označme θ'_2 nejobecnější unifikátor atomů $\text{head}(C_1)$ a $A_1\theta'_1$. Platí

$$\text{head}(C_1)\theta'_2 = A_1\theta'_1\theta'_2. \tag{9}$$

Položme $G'_3 = \text{res}(G'_2, A_1\theta'_1, C_1, \theta'_2)$. Protože θ'_2 je obecnější než σ_1, existuje substituce σ_2 taková, že

$$\sigma_1 = \theta'_2\sigma_2. \tag{10}$$

Dostáváme

$$\theta_1\theta_2 = \theta'_1\sigma_1 = \theta'_1\theta'_2\sigma_2. \tag{11}$$

Tedy $\theta'_1\theta'_2$ je obecnější než $\theta_1\theta_2$.

Množina $\text{var}(\text{head}(C_1))$ je disjunktní s $\text{Dom}(\theta'_1)$ a proto

$$\text{head}(C_1) = \text{head}(C_1)\theta'_1. \tag{12}$$

Nyní platí

$$A_1\theta'_1\theta'_2 = \text{head}(C_1)\theta'_2 = \text{head}(C_1)\theta'_1\theta'_2. \tag{13}$$

Tedy $\theta'_1\theta'_2$ je unifikátor A_1 a $\text{head}(C_1)$, ale θ_1 je jejich nejobecnější unifikátor a proto musí existovat substituce λ_1 taková, že

$$\theta'_1\theta'_2 = \theta_1\lambda_1. \tag{14}$$

Dostáváme

$$A_2\theta_1\lambda_1 = A_2\theta'_1\theta'_2 = \text{head}(C_2)\theta'_1\theta'_2 = \text{head}(C_2)\theta_1\lambda_1 = \text{head}(C_2)\lambda_1.$$

Tedy λ_1 je unifikátor $A_2\theta_1$ a $\text{head}(C_2)$, ale θ_2 je jejich nejobecnější unifikátor a proto musí existovat substituce λ_2 taková, že

$$\theta_2\lambda_2 = \lambda_1. \tag{15}$$

Obdržíme

$$\theta'_1\theta'_2 = \theta_1\lambda_1 = \theta_1\theta_2\lambda_2. \tag{16}$$

Ukázali jsme, že $\theta_1\theta_2$ je obecnější než $\theta'_1\theta'_2$. Dohromady jsme ukázali, že substituce $\theta_1\theta_2$ a $\theta'_1\theta'_2$ jsou variantní. □

Tvrzení 1 (Nezávislost výběrové funkce)**.** *Jestliže je θ' vypočítanou odpovědí na G za použití výběrové funkce R', pak existuje vypočítaná odpověď θ na G za použití výběrové funkce G', která je variantní s θ'.*

Důkaz. Nechť D' je vyvrácení G s použitím výběrové funkce R'. Postupně budeme z D' přerovnáváním kroků za použití Lemma 1 budovat vyvrácení D cíle G použitím R. Předpokládejme, že prvních i kroků vyvrácení D je již správně utvořené. Výběrová funkce R z i plus prvního kroku D vybere podcíl A. Později v D se musí vyskytovat krok, ve kterém výběrová funkce R' vybere A. Postupným prohazováním kroků přesuneme žádaný krok na i plus první místo v D. □

Tvrzení 2. *Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou základní atomy. Jestliže pro každé $1 \leq i \leq n$ existuje vyvrácení cíle $\leftarrow A_i$, pak existuje vyvrácení cíle $\leftarrow A_1, \ldots, A_n$.*

Důkaz. Nechť pro každé $1 \leq i \leq n$ je D_i dílčí vyvrácení cíle $\leftarrow A_i$. Můžeme předpokládat, že dílčí vyvrácení $D_1, \ldots, D_n$ po dvou nesdílí žádnou proměnnou v použitých klauzulích. Spojením vyvrácení $D_1, \ldots, D_n$ za použití vhodné výběrové funkce obdržíme vyvrácení cíle $\leftarrow A_1, \ldots, A_n$. Tvrzení 1 nám dá vyvrácení s použitím výběrové funkce R.

□

Podívejme se nejprve na následující příklad, ve kterém máme definitní cíl

$$G_0 = \leftarrow leq(X, succ(succ(Y)))$$

substituci $\theta = \{X/succ(zero), Y/zero\}$ a definitní program P:

$$leq(zero, X).$$
$$leq(succ(X), succ(Y)) \leftarrow leq(X, Y).$$

Podívejme se na vyvrácení cíle $G_0\theta = \leftarrow leq(succ(zero), succ(succ(zero)))$:

1. $G_1 = \leftarrow leq(zero, succ(zero)), C_1 = leq(succ(A), succ(B)) \leftarrow leq(A, B), \theta_1 = \{A/zero, B/succ(zero)\}$
2. $G_2 = \square$, $C_2 = leq(zero, C)$, $\theta_2 = \{C/succ(zero)\}$

Budeme-li ve stejném pořadí aplikovat klauzule obdržíme vyvrácení cíle G_0:

1. $G'_1 = \leftarrow leq(A, succ(Y))$, $C_1 = leq(succ(A), succ(B)) \leftarrow leq(A, B)$, $\theta'_1 = \{X/succ(A), B/succ(Y)\}$
2. $G'_2 = \square$, $C_2 = leq(zero, C)$, $\theta'_2 = \{A/zero, C/succ(Y)\}$

Substituce

$$\theta'_1\theta'_2 = \{X/succ(zero), B/succ(Y), A/zero, C/succ(Y\}$$

je obecnější než substituce

$$\theta\theta_1\theta_2 = \{X/succ(zero), Y/zero, B/succ(zero), A/zero, C/succ(zero\}.$$

Lemma, které ukazuje, že se jedná o obecnou vlastnost následuje.

Lemma 2 (Zobecnění vyvrácení)**.** *Nechť*

$$G_0\theta \xrightarrow[\theta_1]{C_1} G_1 \rightarrow \cdots \xrightarrow[\theta_n]{C_n} G_n = \square$$

je vyvrácení definitního cíle $G_0\theta$, kde doména substituce θ je disjunktní s množinou všech proměnných vyskytujících se v $C_1, \ldots, C_n$. Poté existuje vyvrácení

$$G_0 \xrightarrow[\theta'_1]{C_1} G'_1 \rightarrow \cdots \xrightarrow[\theta'_n]{C_n} G'_n = \square$$

definitního cíle G_0 takové, že $\theta'_1 \cdots \theta'_n$ je obecnější než $\theta\theta_1 \cdots \theta_n$.

Důkaz. Důkaz vedeme indukcí přes délku vyvrácení n. Jestliže $n = 0$, pak $G_0\theta = \square$ a tedy $G_0 = \square$. Prázdná substituce je jistě obecnější než θ. Předpokládejme, že tvrzení platí pro vyvrácení délky $n-1 > 0$. Nechť $C_1 = B_0 \leftarrow B_1, \ldots, B_m$ a $G_0\theta = \leftarrow A_1\theta, \ldots, A_k\theta$, $A_i\theta = R(G_0\theta)$. Poté $\theta_1 = \mathrm{mgu}(A_i\theta, B_0)$. Protože $\mathrm{Dom}(\theta) \cap \mathrm{var}(C_1) = \emptyset$, platí $A_i\theta\theta_1 = B_0\theta\theta_1$. Atomy A_i a B_0 jsou tedy unifikovatelné. Označme θ'_1 jejich nejobecnější unifikátor. Protože θ'_1 je obecnější než $\theta\theta_1$, musí existovat substituce τ taková, že $\theta'_1\tau = \theta\theta_1$. Položme

$$G''_1 = \leftarrow A_1, \ldots, A_{i-1}, B_1, \ldots, B_m, A_{i+1}, \ldots, A_n$$

a $G'_1 = G''_1\theta'_1$. Poté

$$G_1 = G''_1\theta\theta_1 = G''_1\theta'_1\tau = G'_1\tau$$

Nyní je

$$G'_1\tau \xrightarrow[\theta_2]{C_2} G_2 \to \cdots \xrightarrow[\theta_n]{C_n} G_n = \square$$

vyvrácení délky $n-1$ a za použití indukčního předpokladu dostaneme, že existuje vyvrácení

$$G'_1 \xrightarrow[\theta'_2]{C_2} G'_2 \to \cdots \xrightarrow[\theta'_n]{C_n} G'_n = \square$$

definitního cíle G'_1 takové, že $\theta'_2 \cdots \theta'_n$ je obecnější než $\tau\theta_2 \cdots \theta_n$. Existuje tedy substituce τ' taková, že $\theta'_2 \cdots \theta'_n\tau' = \tau\theta_2 \cdots \theta_n$. Lehce ověříme, že

$$G_0 \xrightarrow[\theta'_1]{C_1} G'_1 \xrightarrow[\theta'_2]{C_2} G'_2 \to \cdots \xrightarrow[\theta'_n]{C_n} G'_n = \square$$

je vyvrácení. Protože $\theta\theta_1\theta_2 \cdots \theta_n = \theta'_1\tau\theta_2 \cdots \theta_n = \theta'_1\theta'_2 \cdots \theta'_n\tau'$, je substituce $\theta'_1 \cdots \theta'_n$ obecnější než $\theta\theta_1 \cdots \theta_n$. $\square$