KATEDRA
INFORMATIKY
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

JAN LAŠTOVIČKA
https://www.inf.upol.cz/lide/jan-lastovicka

LOGICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

9. Úplnost – část druhá

poznámky k přednášce, verze z 23. listopadu 2026

Nechť je předem stanoven program P, výběrová funkce R a definitní cíl G.

Tvrzení 1. *Nejmenší Herbrandův model programu P je podmnožinou množiny úspěchů programu P.*

Důkaz. Nechť $A \in M_P$. Podle Tvrzení 9 ze čtvrté přednášky je $A \in T_P \uparrow \omega$. Z definice $T_P \uparrow \omega$ plyne, že existuje n takové, že $A \in T_P \uparrow n$. Indukcí přes n dokážeme, že existuje vyvrácení definitního cíle $\leftarrow A$. Pro $n = 0$ tvrzení platí triviálně, protože $T_P \uparrow 0 = \emptyset$. Nechť tvrzení platí pro $n > 0$. Poté existuje varianta $C = B_0 \leftarrow B_1, \ldots, B_m$ definitní klauzule z P a substituce θ, σ takové, že $\mathrm{mgu}(A, B_0) = \theta$ a $C\theta\sigma \in \mathit{ground}(P)$ a $\{B_1\theta\sigma, \ldots, B_m\theta\sigma\} \subseteq T_P \uparrow (n-1)$. Podle indukčního předpokladu musí existovat vyvrácení definitních cílů $\leftarrow B_1\theta\sigma, \ldots, \leftarrow B_m\theta\sigma$. Použitím Tvrzení 2 z předchozí přednášky získáme vyvrácení cíle $(\leftarrow B_1, \ldots, B_m)\theta\sigma$. Lemma 2 z předchozí přednášky nám dá vyvrácení cíle $(\leftarrow B_1, \ldots, B_m)\theta$. Před takto získané vyvrácení stačí přidat cíl $\leftarrow A$ a obdržíme hledané vyvrácení. □

Tvrzení 2 (Slabá úplnost)**.** *Jestliže $P \models \neg G$, pak existuje vyvrácení G vzhledem k P.*

Důkaz. Označme $G = \leftarrow A_1, \ldots, A_m$. Nechť $P \models \neg G$. Protože $M_P \not\models G$, platí $M_P \models \exists(A_1 \wedge \cdots \wedge A_m)$. Existuje substituce θ taková, že $\{A_1\theta, \ldots, A_m\theta\} \subseteq M_P$. Podle Tvrzení 1 existuje pro každé $1 \leq i \leq m$ vyvrácení cíle $\leftarrow A_i\theta$. Z nich vytvoříme podle Tvrzení 2 z předchozí přednášky vyvrácení cíle $G\theta$. Lemma 2 z předchozí přednášky nám dá vyvrácení cíle G. □

Tvrzení 3. *Jestliže θ je správná odpověď na G, pak prázdná substituce je vypočítaná odpověď na $G\theta$.*

Důkaz. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou všechny proměnné v $G\theta$. Do jazyka přidáme konstanty $a_1, \ldots, a_n$. Nechť σ je substituce $\{X_1/a_1, \ldots, X_n/a_n\}$. Nyní $P \models \neg G\theta\sigma$ a podle Tvrzení 2 existuje vyvrácení definitního cíle $G\theta\sigma$. Můžeme předpokládat, že obdržené vyvrácení neobsahuje žádnou z proměnných $X_1, \ldots, X_n$. Cíl $G\theta\sigma$ je základní a proto je vyvrácením vypočítaná odpověď prázdná substituce. Nahrazením konstanty a_i za proměnnou X_i pro každé $1 \leq i \leq n$ ve vyvrácení obdržíme vyvrácení cíle $G\theta$, jehož vypočítaná odpověď bude prázdná substituce. □

Tvrzení 4 (Silná úplnost)**.** *Pro každou správnou odpověď na G existuje obecnější vypočítaná odpověď na G.*

Důkaz. Nechť θ je správná odpověď na G. Podle Tvrzení 3 existuje vyvrácení definitního cíle $G\theta$ s prázdnou vypočítanou odpovědí. Nechť $\theta_1, \ldots, \theta_n$ je posloupnost nejobecnějších unifikátorů ve vyvrácení. Podle Lemma 2 z předchozí přednášky existuje vyvrácení definitního cíle G s posloupností nejobecnějších unifikátorů $\theta'_1, \ldots, \theta'_n$ takových, že $\tau_1 = \theta'_1 \cdots \theta'_n$ je obecnější než $\tau_2 = \theta\theta_1 \cdots \theta_n$. Restrikce substituce τ_1 na $\mathrm{var}(G)$ je vypočítaná odpověď na G, která je obecnější než restrikce substituce τ_2 na $\mathrm{var}(G)$, ale ta je rovna θ. □